

ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 1 — МАТЕМАТИКА

Том 85
1991

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
“ST. KLIMENT OHRIDSKI”

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

LIVRE 1 — MATHEMATIQUES

Tome 85
1991

СОФИЯ, 1993, SOFIA
УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
PRESSES UNIVERSITAIRES “ST. KLIMENT OHRIDSKI”

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ (главен редактор), ТИНКО ТИНЧЕВ (научен секретар),
ВЕСКО ВЪЛОВ, ГЕОРГИ ЧОБАНОВ, ИВАН СОСКОВ, ИВАНКА ИВАНОВА-КАРА-
ТОПРАКЛИЕВА, НЕДЯЛКО НЕНОВ, ПЛАМЕН ДЖАКОВ

МГ

~~ПД 176/99~~

EXAMPLES OF STRUCTURES WHICH DO NOT ADMIT RECURSIVE PRESENTATIONS*

ANGEL DITCHEV

Ангел Дичев. ПРИМЕРЫ СТРУКТУР, НЕДОПУСКАЮЩИХ РЕКУРСИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

В статье показано существование класса структур с одной функцией и с одним предикатом, которые не допускают эффективной нумерации и для которых все Σ_i -определимые подмножества \mathbb{N} являются Σ_i^0 ($i = 1, 2$) множествами в арифметической иерархии.

Angel Dichev. EXAMPLES OF STRUCTURES WHICH DO NOT ADMIT RECURSIVE PRESENTATIONS

In the paper it is proved that there exists a class of structures with a unary function and a unary predicate which do not admit an effective enumeration, but all Σ_i -definable subsets of \mathbb{N} are Σ_i^0 ($i = 1, 2$) sets in the arithmetical hierarchy.

In the Recursive Model Theory there are a lot of attempts to characterize structures with denumerable domains which admit recursive presentation. First, there are some necessary and some sufficient conditions [1]. Second, in many of them the considerations are restricted to a given class of structures, for example, Boolean algebras, partially ordered sets and so on [1]. Further, there are given definitions which restrict or extend the class of structures satisfying these definitions and attempts to characterize the corresponding classes are made. One of these

* Research partially supported by the Committee for Science at the Ministry of Education, Contract No 933, 1991.

definitions is the well-known strong constructivization (recursive presentation) [1]. In [2] Soskova and Soskov have defined another notion of effective enumeration (recursively enumerable (r.e.) presentation) of a partial structure. So they have succeeded to characterize the structure satisfying their definition by means of REDS [2] with finitely many constants. In connection with this and some other results [3, 4] I. Soskov has stated a conjecture that if in a given partial structure every subset of \mathbb{N} , definable by means of SC [3] with finitely many constants, is r.e. then the structure admits an effective enumeration.

In [5] a counter-example of Soskov's conjecture is shown. A necessary and sufficient condition of those structures with unary functions and predicates which admit effective enumeration is obtained as well.

Keeping in mind [6] and the power of $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ one could suppose that it will be possible to characterize the structures which admit an effective enumeration in the terms of $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. I. Soskov has made a suggestion that if in a given total structure every subset of \mathbb{N} definable by means of SC with finitely many constants is r.e. and every Σ_2 -definable set (cf. the definitions below) is Σ_2^0 in the arithmetical hierarchy, then the structure admits effective enumeration. It has been found that is not true. In any case we could not omit a condition like (iii) of Corollary 2 [5]. We should have an effective way for every termal predicate (conjunction of atomic predicate formulae and their negations) to find a type of an element which satisfies this termal predicate.

In this paper counter-examples of this suggestion are shown. Namely, it is proved that there exists a class of structures with a unary function and a unary predicate which do not admit an effective enumeration, but all Σ_i -definable subsets of \mathbb{N} are Σ_i^0 sets in the arithmetical hierarchy, $i = 1, 2$. And the first order theories of these structures (without constants of the structures) are decidable. The idea of these counter-examples comes from the papers [7, 8, 9]. The problem here (keeping in mind [5]) is to find a propriate family of sets which has no universal r.e. set and which coincides with the family of all types of some structure. And meanwhile such kind of results are obtained.

Let us remember some definitions from [5] which we need.

\mathbb{N} denote the set of all natural numbers.

Let U be a subset of \mathbb{N}^{n+1} and \mathcal{F} be a family of subsets of \mathbb{N}^{n+1} . The set U is said to be universal for the family \mathcal{F} iff for any a the set $\{x \mid (a, x) \in U\}$ belongs to the family \mathcal{F} and, conversely, for any A from \mathcal{F} there exists such a , that $A = \{x \mid (a, x) \in U\}$.

We suppose that E_0, E_1, \dots be a canonical enumeration of all finite sets of natural numbers.

Let D_1 and D_2 be finite sets. Then we define the relations $\sqsubseteq, \bar{\sqsubseteq}, \sqsubset$, as follows:

$D_1 \sqsubseteq D_2$ iff $\exists k \forall x (x \in D_1 \iff x + k \in D_2)$;

$D \upharpoonright k = \{x \mid x \in D \& x \leq k\}$;

$D_1 \bar{\sqsubseteq} D_2$ iff $\exists k (D_2 \upharpoonright k = D_1)$;

$D_1 \sqsubset D_2$ iff $\exists D' (D_1 \bar{\sqsubseteq} D' \& D' \sqsubseteq D_2)$.

Besides we define a binary operation "*" between two finite sets of natural numbers as follows:

Let E_{v_1} and E_{v_2} be given and $k_i = \max\{x \mid x \in E_{v_i}\}$, $i = 1, 2$. Then $E_v = E_{v_1} * E_{v_2}$ iff $E_v \upharpoonright k_1 = E_{v_1}$ and

$$\forall x (k_1 + 1 \leq x \Rightarrow (x \in E_v \iff x - k_1 - 1 \in E_{v_2})).$$

Let $\mathfrak{A} = (B; \theta_1, \dots, \theta_n; F_1, \dots, F_k)$ be a structure, where B is an arbitrary denumerable set, $\theta_1, \dots, \theta_n$ are functions of many arguments on B , and F_1, \dots, F_k are predicates of many arguments on B . We shall consider in the paper that all θ_i ($1 \leq i \leq n$) and all F_j ($1 \leq j \leq k$) are totally defined, so we have in mind only total structures.

Effective enumeration (or r.e. presentation) of the structure \mathfrak{A} is every ordered pair $\langle \alpha, \mathfrak{B} \rangle$, where $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}; \varphi_1, \dots, \varphi_n; G_1, \dots, G_k \rangle$ is a structure of the same relational type as \mathfrak{A} and α is a surjective mapping of \mathbb{N} onto B such that the following conditions hold:

- (i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n; G_1, \dots, G_k$ are partial recursive;
- (ii) $\alpha(\varphi_i(x_1, \dots, x_{a_i})) = \theta_i(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{a_i}))$ for all natural numbers x_1, \dots, x_{a_i} ($1 \leq i \leq n$);
- (iii) $G_j(x_1, \dots, x_{b_j}) = F_j(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{b_j}))$ for all natural numbers x_1, \dots, x_{b_j} ($1 \leq j \leq k$).

We say that the structure \mathfrak{A} admits an effective enumeration iff there exists an effective enumeration of the structure \mathfrak{A} .

We shall identify the predicates with the mappings which obtain values 0 or 1, taking 0 for true and 1 for false.

Let \mathcal{L} be the first order language corresponding to the structure \mathfrak{A} , i. e. \mathcal{L} consists of n functional symbols f_1, \dots, f_n and k predicate symbols T_1, \dots, T_k . We suppose that there is denumerable set of variables.

If τ is a term or a formula in the language \mathcal{L} , then we write $\tau(X_1, \dots, X_a)$ (or shortly $\tau(\mathbf{X})$) to denote that all variables occurring in τ are among X_1, \dots, X_a . If $\tau(X_1, \dots, X_a)$ is a term or a formula and s_1, \dots, s_a (or shortly \mathbf{s}) are arbitrary elements of B then by $\tau_{\mathfrak{A}}(X_1/s_1, \dots, X_a/s_a)$ (or shortly $\tau_{\mathfrak{A}}(\mathbf{X}/\mathbf{s})$), we denote the value of τ in \mathfrak{A} over \mathbf{s} .

Termal predicates in the language \mathcal{L} are all conjunctions of atomic predicates or their negations. We assume fixed an effective coding of the atomic predicates, the termal predicates and the disjunctions of termal predicates of the language \mathcal{L} .

Let A be a subset of \mathbb{N} . The set A is said to be Σ_1 -definable in the structure \mathfrak{A} iff for some recursive sequence $\{\Pi^{i,j}\}$ of termal predicates with free variables among \mathbf{X}, \mathbf{Y}_j and for some fixed elements \mathbf{s} of B the following equivalence is true:

$$i \in A \iff \text{there exist } j \text{ and elements } \mathbf{t}_j \text{ of } B \text{ such that } \Pi^{i,j}(\mathbf{X}/\mathbf{s}, \mathbf{Y}_j/\mathbf{t}_j) = 0.$$

The subset A of \mathbb{N} is said to be Σ_2 -definable in the structure \mathfrak{A} iff for some recursive sequence $\{\Pi^{i,j,k}\}$ of \bigwedge -junctions of termal predicates with free variables among $\mathbf{X}, \mathbf{Y}_j, \mathbf{Z}_{j,k}$ and for some fixed elements \mathbf{s} of B the following equivalence is true:

$$i \in A \iff \text{there exist } j \text{ and elements } \mathbf{t}_j \text{ of } B \text{ such that for any } k \\ \text{and for any elements } \mathbf{p}_{j,k} \text{ of } B, \text{ the equality} \\ \Pi^{i,j,k}(\mathbf{X}/\mathbf{s}, \mathbf{Y}_j/\mathbf{t}_j, \mathbf{Z}_{j,k}/\mathbf{p}_{j,k}) = 0 \text{ holds.}$$

Here one can see that the values of Σ_1 -formula and Σ_2 -formula are given in the language $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ over s in \mathfrak{A} . But for our purpose it is not necessary to give these definitions and we omit them.

Theorem 1. *There exists such set V of natural numbers that the set $[V] = \{v \mid \exists w \in V (E_v \sqsubseteq E_w)\}$ is in the class Σ_2^0 of the arithmetical hierarchy and for every $v \in \mathbb{N}$ there exists such $w \in V \subseteq [V]$ that $E_v \sqsubset E_w$ and the family $\{E_v \mid v \in [V]\}$ has not an universal r.e. set.*

Proof. Let U be subset of \mathbb{N}^3 which is r.e. and universal for the r.e. subsets of \mathbb{N}^2 and $U_{n,x} = \{y \mid (n, x, y) \in U\}$.

The set V we construct by steps, so that on step s we construct V_s , such that $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_s \subseteq \dots$ and at the end $V = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} V_s$. Besides we construct the

sequence $V_0, V_1, \dots, V_s, \dots$, so that $v \in V_s$ be a Δ_2^0 set relatively v, s . Thus we ensure V (and $[V]$ as well) to be a Σ_2^0 set.

On the other hand, on step s we need some elements which are canonical codes of some finite sets not belonging to V . For this purpose we construct set C of prohibited elements. Again we do that on steps so that $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_s \subseteq \dots$ and $C = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} C_s$. The set C plays only an auxiliary role.

When we want to add some elements to C_s we have to know if some $U_{s,x}$ is finite. In this case we find v such that $E_v = U_{s,x}$. For this aim when on some step we don't know if $U_{s,x}$ is finite we put (s, x) in the set I . The set I consists of these (s, x) for which $U_{s,x}$ is eventually infinite set. When on step s we understand that some $U_{t,x}$ is finite then we force (t, x) out of I .

Construction. Step $s = 0$. Fix $V_0 = C_0 = I_0 = \emptyset$.

Step $s+1$. Let $m_v = \max\{x \mid x \in E_v\}$, $k_{s+1} = \min\{m_v \mid \forall w \in V_s (E_v \not\sqsubseteq E_w)\}$ and v_{s+1} be the least positive integer v such that $m_v = k_{s+1} \forall w \in V_s (E_v \not\sqsubseteq E_w)$. We verify if there exists $(t, x_t) \in I_s$ such that $\forall y (y \leq k_{s+1} + s + 3 \vee y \notin U_{t,x_t})$. If that is so let all of them be $U_{t_1,x_{t_1}}, \dots, U_{t_l,x_{t_l}}$. We find w_1, \dots, w_l such that $E_{w_1} = U_{t_1,x_{t_1}}, \dots, E_{w_l} = U_{t_l,x_{t_l}}$. We fix

$$C_{s+1} = C_s \cup \{w_1, \dots, w_l\}, \quad I'_{s+1} = I_s \setminus \{(t_1, x_{t_1}), \dots, (t_l, x_{t_l})\}.$$

Let

$$r_{s+1} = \min\{m_v \mid E_{v_{s+1}} \sqsubset E_v \ \& \ \forall w \in C_{s+1} (E_w \not\sqsubseteq E_v)\}$$

and v_{s+1} be the least positive integer v such that

$$m_v = r_{s+1} \ \& \ E_{v_{s+1}} \sqsubset E_v \ \& \ \forall w \in C_{s+1} (E_w \not\sqsubseteq E_v).$$

We denote such v by v_{s+1} and fix $V_{s+1} = V_s \cup \{v_{s+1}\}$. At the end we verify whether there exists x such that

$$\forall v \in V_{s+1} \ \forall k \leq v \ \exists y (y \in U_{s+1,x} \ \& \ y + k \notin E_v \ \& \ |U_{s+1,x}| \geq 2).$$

If it is so let x_{s+1} be the least such x . In this case we fix

$$I_{s+1} = I'_{s+1} \cup \{(s+1, x_{s+1})\},$$

otherwise $I_{s+1} = I'_{s+1}$. The construction is completed.

First, it is easy to check by induction on s that $\forall s (v \in V_s \Rightarrow |E_v| \geq 2)$.

One could see easily that for each s the sets V_s and I_s contain at most s elements, as well.

Lemma. For every $s > 0$ and for every finite sets E_{p_1}, \dots, E_{p_s} , each of them containing at least 2 elements, there exists such finite set E_p that

$$\max\{x \mid x \in E_p\} \leq s + 1$$

and for all v , $E_{p_i} \not\subseteq E_v * E_p$, $i = 1, \dots, s$.

The proof of this lemma one could easily do by induction on s and it is more or less combinatorial one.

Now we can see that there exists such v that

$$E_{v_{s+1}} \subseteq E_v \ \& \ \forall w \in C_{s+1}(E_w \not\subseteq E_v).$$

Indeed, according to the above lemma there exists such p that

$$\forall w \in C_{s+1}(E_w \not\subseteq E_{v_{s+1}} * E_p) \ \text{and} \ \max\{x \mid x \in E_p\} \leq s + 2,$$

i. e. v_{s+1} exists on every step $s + 1$ and $\max\{x \mid x \in E_{v_{s+1}}\} \leq k_{s+1} + s + 3$. Obviously, for all v there exists $w \in V$, such that $E_v \subseteq E_w$.

Let us prove that $\forall v \in V \forall w \in C(E_w \not\subseteq E_v)$. For this purpose it is enough to prove that $\forall s \forall v \in V_s \forall t \leq_s (U_{t,x_t} \not\subseteq E_v)$.

It is obvious that $\forall v \in V_0 \forall t \leq_0 (U_{t,x_t} \not\subseteq E_v)$.

Let us assume that $\forall v \in V_s \forall t \leq_s (U_{t,x_t} \not\subseteq E_v)$. On step $s + 1$ we have $V_{s+1} = V_s \cup \{v_{s+1}\}$. Let us remember that we chose v_{s+1} such that $\forall t \leq_s (U_{t,x_t} \not\subseteq E_{v_{s+1}})$. Besides, we chose $(s + 1, x_{s+1})$ such that

$$\forall v \in V_{s+1} \forall k_k \leq_v \exists y (y \in U_{s+1, x_{s+1}} \ \& \ y + k \notin E_v \ \& \ |U_{s+1, x_{s+1}}| \geq 2).$$

Therefore, $U_{s+1, x_{s+1}} \not\subseteq E_v$, i. e. $\forall v \in V_{s+1} \forall t \leq_{s+1} (U_{t,x_t} \not\subseteq E_v)$.

So it is proved that $\forall v \in V \forall w \in C(E_w \not\subseteq E_v)$.

Let us note that the construction is Δ_2^0 , since the conditions which we verify are Π_1^0 or Σ_1^0 . Note that we define w such that $E_w = U_{s, x_s}$, and that w is a function of s . So V is Σ_2^0 set and since $[V]$ is Σ_2^0 set, as well.

At the end let us assume that the family $\{E_v \mid v \in [V]\}$ has an universal r.e. set. Let it be A . Denote by $A_x = \{y \mid (x, y) \in A\}$ and $U_x = \{(x, y) \mid (s, x, y) \in U\}$. Then $\Delta = U_s$ for some s .

Let us consider step $s + 1$. It is clear that

$$\exists x \forall v \in V_{s+1} \forall k_k \leq_v \exists y (y \in U_{s+1, x} \ \& \ y + k \notin E_v \ \& \ |U_{s+1, x}| \geq 2).$$

Then

$$U_{s+1, x_{s+1}} = A_{x_{s+1}} \in \{E_v \mid v \in [V]\} \ \text{and} \ U_{s+1, x_{s+1}} = E_w \ \text{for some } w,$$

i. e. there exist $w \in C$ and $v \in [V]$ such that $E_w \subseteq E_v$, which is a contradiction.

So, the family $\{E_v \mid v \in [V]\}$ has not a universal r.e. set and Theorem 1 is proved.

One can prove in the same way the following relativized version of Theorem 1.

Theorem 1'. For any set of natural numbers A there exists such subset V_A of \mathbb{N} that the set $[V_A] = \{v \mid \exists w \in V_A [E_v \subseteq E_w]\}$ is in the class $\Sigma_2^0[A]$ and for every

v there exists such $w \in V_A \subseteq [V_A]$ that $E_v \sqsubset E_w$ and the family $\{E_v \mid v \in V_A\}$ has not a universal r.e. in A set.

Now we can prove the following

Theorem 2. *There exists a structure $\mathfrak{A} = \langle B; \theta; F \rangle$ with unary θ, F , which does not admit an effective enumeration but all Σ_1 -definable in \mathfrak{A} subsets of \mathbb{N} are r.e. and all Σ_2 -definable in \mathfrak{A} subsets of \mathbb{N} are Σ_2^0 sets in the arithmetical hierarchy.*

Proof. Let V be such a set which exists according to Theorem 1 and $V = \{v_0, v_1, \dots\}$. Let in addition B be the set $\{b_{k,n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$, where all $b_{k,n}$ are distinct, $k, n \in \mathbb{N}$. We define θ and F as follows:

$$\theta(b_{k,n}) = b_{k,n+1} \quad \text{and} \quad F(b_{k,n}) = 0 \iff n \in E_{v_k} \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

It would be useful to give some intuitive explanations about the above structure. For each fixed k we can consider the set $\{b_{k,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ as a copy of the set of natural numbers and the function F over this set as the successor function.

If s is an arbitrary element of B then we use $[s]$ to denote the type $\{k \mid F(\theta^k(s)) = 0\}$ of the element s . Thus $v \in [V] \iff E_v$ is a type of some element of B . So for any element s there exist finitely many k such that $F(\theta^k(s)) = 0$ and infinitely many k such that $F(\theta^k(s)) = 1$.

In the case which we consider the language is with a single unary functional symbol f and a single unary predicate symbol T . We use $f^k(X)$ to denote the term $f(\dots(f(X))\dots)$, where the symbol f occurs k times in the term. If Y is a variable and Π is a termal predicate, then we denote by $[Y; \Pi]$ the set

$$\{k \mid T(f^k(Y)) \text{ join in } \Pi \text{ as a conjunctive member} \}$$

and by $\neg[Y; \Pi]$ the set

$$\{k \mid \neg T(f^k(Y)) \text{ join in } \Pi \text{ as a conjunctive member} \}.$$

It is obvious that for any fixed element $s \in B$, any variable Y and any termal predicate Π there exists effective way to verify whether $[Y; \Pi] \subseteq [s]$ or not and whether $\neg[Y; \Pi] \cap [s] = \emptyset$ or not.

First, we prove that every closed consistent existential formula in this language is true in \mathfrak{A} .

It is obvious, that is enough to show that every formula of the kind $\exists X \Pi(X)$ is true in \mathfrak{A} , where $\Pi(X)$ is a termal predicate on the form

$$T(f^{k_1}(X)) \ \& \ \dots \ \& \ T(f^{k_s}(X)) \ \& \ \neg T(f^{l_1}(X)) \ \& \ \dots \ \& \ \neg T(f^{l_t}(X))$$

and $\{k_1, \dots, k_s\} \cap \{l_1, \dots, l_t\} = \emptyset$.

We can consider that $k_s = \max\{k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_t\}$ and let \underline{v} be such that $E_{\underline{v}} = \{k_1, \dots, k_s\}$. We find v_k such that $E_{\underline{v}} \sqsubset E_{v_k}$. This means that for some E' , $E_{\underline{v}} \sqsubset E' \sqsubseteq E_{v_k}$, i. e. $E_{\underline{v}} = E' \upharpoonright k_s$ and $\forall x (x \in E' \iff x + m \in E_{v_k})$ for some m . Now it is easy to check that $\Pi(X/\theta^m(b_{k_s,0})) = 0$, i. e. $\exists X \Pi(X)$ is true in \mathfrak{A} .

It is obvious now that every closed universal formula $\forall X \Pi(X)$, where $\Pi(X)$ is a termal predicate, is not true in \mathfrak{A} .

Second, we show that every Σ_1 -definable subset of \mathbb{N} in \mathfrak{A} is r.e.

Indeed, let A be Σ_1 -definable subset of \mathbb{N} in the structure \mathfrak{A} , i. e. there exists a recursive sequence $\{\Pi^{i,j}\}$ of termal predicates with free variables among \mathbf{X}, \mathbf{Y}_j and for some fixed elements \mathbf{s} of B the following equivalence is true:

$$i \in A \iff \text{there exist } j \text{ and elements } \mathbf{t}_j \text{ of } B \text{ such that } \Pi^{i,j}(\mathbf{X}/\mathbf{s}, \mathbf{Y}_j/\mathbf{t}_j) = 0.$$

Let us represent the formula $\Pi^{i,j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_j)$ in the form $P^{i,j}(\mathbf{X}) \& Q^{i,j}(\mathbf{Y}_j)$, where some of them could be empty. There is an effective way to find $P^{i,j}(\mathbf{X})$ and $Q^{i,j}(\mathbf{Y}_j)$ from $\Pi^{i,j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_j)$. Then keeping in mind that every closed consistent existential formula is true in \mathfrak{A} , we obtain

$$i \in A \iff \text{there exists } j \text{ such that } P^{i,j}(\mathbf{X}/\mathbf{s}) = 0 \\ \& \text{ cotractory conjunctive members do not join in } Q^{i,j},$$

i. e.

$$i \in A \iff \exists j ([X_1; P^{i,j}] \subseteq [s_1] \& \neg[X_1; P^{i,j}] \cap [s_1] = \emptyset \& \dots \\ \& [X_a; P^{i,j}] \subseteq [s_a] \& \neg[X_a; P^{i,j}] \cap [s_a] = \emptyset \\ \& \text{ contradictory members do not join in } Q^{i,j}.$$

Therefore the set A is r.e. (Σ_1^0 set).

If Π is a disjunction of termal predicates with free variables among $X_1, \dots, X_a(\mathbf{X}), Y_1, \dots, Y_b(\mathbf{Y}), Z_1, \dots, Z_c(\mathbf{Z})$, and $s_1, \dots, s_a(\mathbf{s})$ are elements of B and E_{v_1}, \dots, E_{v_b} are finite sets, then by $\{\Pi; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\}$ we denote the formula with free variables among \mathbf{Z} , obtained from Π as follows:

a) If Π is a termal predicate and $\Pi = P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \& Q(\mathbf{Z})$, then $\{\Pi; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\} = Q'(\mathbf{Z})$, if

$$[X_1; \Pi] \subseteq [s_1] \& \neg[X_1; \Pi] \cap [s_1] = \emptyset \& \dots \& [X_a; \Pi] \subseteq [s_a] \& \neg[X_a; \Pi] \cap [s_a] = \emptyset$$

$$\& [Y_1; \Pi] \subseteq E_{v_1} \& \neg[Y_1; \Pi] \cap E_{v_1} = \emptyset \& \dots \& [Y_b; \Pi] \subseteq E_{v_b} \& \neg[Y_b; \Pi] \cap E_{v_b} = \emptyset$$

and $\{\Pi; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\} = T(Z_1) \& \neg T(Z_1)$, otherwise. Here $Q'(\mathbf{Z}) = Q(\mathbf{Z})$ if $Q(\mathbf{Z})$ is nonempty, and $Q'(\mathbf{Z}) = T(Z_1) \vee \neg T(Z_1)$, otherwise.

b) If $\Pi = (\Pi^1 \vee \Pi^2)$, then

$$\{\Pi; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\} = \{\Pi^1; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\} \vee \{\Pi^2; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\}.$$

There is an effective way to find $\{\Pi; \mathbf{s}; E_{v_1}, \dots, E_{v_b}\}$ from Π, \mathbf{s} and E_{v_1}, \dots, E_{v_b} .

Now let us note that if we have a disjunction of termal predicates Π with free variables among \mathbf{X}, \mathbf{Z} , then the formula $\forall \mathbf{Z}(\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))$ is true in \mathfrak{A} over \mathbf{s} iff the formula $\{\Pi; \mathbf{s}\}$ (here $b = 0$) is a tautology in propositional logic, taking the atomic predicates as atoms. Here one has to keep in mind that for every atomic predicate there is an element which it is true in \mathfrak{A} for and there is an element which it is not true in \mathfrak{A} for. Besides there is an effective way to verify if given disjunction of conjunctions of atoms and their negations is a tautology or not.

Now let A be Σ_2 -definable subset of \mathbb{N} in the structure \mathfrak{A} , i. e. there exists a recursive sequence $\{\Pi^{i,j,k}\}$ of disjunctions of termal predicates with free variables

among $X, Y_j, Z_{j,k}$ and for some fixed elements s of B the following equivalence is true:

$$i \in A \iff \text{there exist } j \text{ and elements } t_j \text{ of } B \text{ such that for any } k \\ \text{and for any elements } p_{j,k} \text{ of } B, \text{ the equation} \\ \Pi^{i,j,k}(X/s, Y_j/t_j, Z_{j,k}/p_{j,k}) = 0 \text{ holds.}$$

Hence,

$$i \in A \iff \exists j \exists \text{ finite sequence } v_1, \dots, v_l, (v_1 \in [V] \& \dots \& v_l \in [V] \\ \& \forall k (\{\Pi^{i,j,k}; s; E_{v_1}, \dots, E_{v_l}\} \text{ is a tautology})).$$

Now it is obvious that A is Σ_2^0 set.

At the end let us assume that the structure \mathfrak{A} admits an effective enumeration. Then the partial structure $\bar{\mathfrak{A}} = \langle B; \theta, F \rangle$, where θ is the same as in \mathfrak{A} and F is the restriction of F over those elements which obtain value 0, admits an effective enumeration too. Let us note again that $v \in [V] \iff E_v$ is a type of some element of B in the structure $\bar{\mathfrak{A}}$. According to the main theorem in [5], the family $\{E_v \mid v \in [V]\}$ has a universal r.e. set, which contradict to Theorem 1. So, \mathfrak{A} does not admit effective enumerations.

Theorem 2'. *For any $A \subseteq \mathbb{N}$ there exists a structure $\mathfrak{A}_A = \langle B; \theta; F \rangle$ with unary θ, F , which does not admit an effective enumeration (even effective in A) but all Σ_1 -definable in \mathfrak{A}_A subsets of \mathbb{N} are r.e. in A and all Σ_2 -definable in \mathfrak{A}_A subsets of \mathbb{N} are $\Sigma_2^0[A]$ sets in the arithmetical hierarchy.*

Let us note that in fact we obtain also the following

Theorem 3. *There exists an infinite class of structures*

$$\{\mathfrak{A}_A \mid A \subseteq \mathbb{N} \& \mathfrak{A}_A = \langle B; \theta; F \rangle\}$$

with unary θ, F , and decidable first order theory (without constants of the structure) such that for any A , \mathfrak{A}_A does not admit an effective (even effective in A) enumeration.

So, the problem of characterization of those structures which admit an effective enumeration is still open.

Acknowledgements. I would like to thank A. Soskova and I. Soskov for the useful discussions on the theme and for finding out some mistakes in one of the preliminary versions of this paper.

REFERENCES

1. Ershov, Y. L. Decision problems and constructivizable models (in Russian). Nauka, Moscow, 1980.
2. Soskova, A. A., I. N. Soskov. Effective enumerations of abstract structures. — In: Heyting'88: Mathematical Logic (ed. P. Petkov), Plenum Press, New York — London, 1989.
3. Soskov, I. N. Definability via enumerations. — J. Symbolic Logic, 54(2), 1989.

4. Soskov, I. N. Computability by means of effective definable schemes and definability via enumerations. — Arch. for Math. Log., **29**, 1990, 187–200.
5. Ditchев, A. V. On the effective enumerations of partial structures, Annuaire de l'Université de Sofia, Faculté de Mathématiques et Informatique, livre 1, **83**, 1989.
6. Chisholm, J. The complexity of intrinsically r.e. subset of existentially decidable models. — J. Symbolic Logic, **55**(3), 1990.
7. Ditchев, A. V. Effective enumerations of families of finite sets of natural numbers. — Zeit. für Math. Log. und Grundl. der Math., **37**, 1991.
8. Menzel, W., V. Sperschneider. Recursively enumerable extensions of R_1 by finite functions. — In: Logic and Machines: Decision Problem and Complexity (ed. E. Börger, G. Hasenjäger, D. Roedding). Lecture Notes in Comp. Sci., **171**, 1984, 62–76.
9. Kummer, M. Negative results about the Length Problem. — In: Computation Theory and Logic (ed. E. Börger), Lecture Notes in Comp. Sci., **270**, 1987, 237–248.

Received 25.02.1992

ON THE AVERAGE DELAY OF THE DETECTION OF CYCLIC LOOPS*

DIMITER SKORDEV

Димитр Скордев. О СРЕДНЕЙ ЗАДЕРЖКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАЦИКЛИВАНИЙ

В одной предшествующей работе автор настоящей работы предложил один метод обнаружения некоторых зацикливаний в вычислительных процессах. Был указан один частный случай метода, оптимальный в определенном смысле и использующий числа Фибоначчи. В настоящей работе делается сравнение между эффективности того частного случая и одного другого частного случая, предложенного раньше Р. П. Брентом. Устанавливается одно дальнейшее оптимальное свойство частного случая, использующего числа Фибоначчи.

Dimitar Skordev. ON THE AVERAGE DELAY OF THE DETECTION OF CYCLIC LOOPS

In a previous paper the author of the present paper has proposed a method for the detection of some kinds of cyclic loops in computational processes. A particular case of the method has been indicated, which is optimal in a certain sense and makes use of Fibonacci numbers. In the present paper a comparison is made between the effectiveness of that particular case and the effectiveness of another particular case proposed earlier by R. P. Brent. A further optimal property of the particular case using Fibonacci numbers is established.

1. INTRODUCTION

In the paper [1], a method has been proposed for the detection of some kinds of cyclic loops in computational processes, and a particular case of this method

* Research partially supported by the Ministry of Science and Higher Education, Contract MM 43/91.

has been indicated, which is optimal in a certain sense and makes use of Fibonacci numbers. For the sake of brevity, we shall call this particular case *the F-method*. No previous work on loop detection has been quoted in that paper, due to the lack of information in this respect at the moment of writing of the paper. When the paper was published, the author found out about Floyd's loop detection method presented in Section 3.1 of the book [2] (the book was available in its Russian translation of the first edition). Several years later, in 1990, the author had the occasion to see the second edition of [2], and then he observed that a particular case of his method from [1] (but not an optimal one) has been used much earlier by R. P. Brent (cf. Exercise 7 in Section 3.1 of the second edition of [2]). From the optimal property proved in [1] a certain advantage of the F-method over the Brent's one can be seen, but a further comparison of the efficiency of both methods is desirable. Some calculations providing elements of such a comparison will be presented in this paper, and another optimal property of the F-method will be established.

2. DISCRETE AUTONOMOUS PROCESSES, CYCLIC LOOPS IN THEM AND SEQUENCES FOR DETECTION OF SUCH LOOPS

We shall first recollect some definitions from the paper [1].

By definition, a *discrete autonomous process* is a function P with $\text{dom } P = \mathbb{N}$ (the set of the non-negative integers¹) such that for all t_0 and t_1 in \mathbb{N} the implication

$$P(t_0) = P(t_1) \Rightarrow P(t_0 + 1) = P(t_1 + 1)$$

holds (as an example, the sequence can be mentioned which consists of the consecutive memory states of a non-terminating computational process using no external information sources). If P is a discrete autonomous process, and $t_1 \in \mathbb{N}$, then we say that a *cyclic loop is present in P at the moment t_1* iff there is a t_0 in \mathbb{N} such that $t_0 < t_1$ and $P(t_0) = P(t_1)$.

Let $\tau = \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ be a strictly increasing sequence of elements of \mathbb{N} . For each t in \mathbb{N} satisfying the inequality $t > \tau_0$, let $\theta_\tau(t)$ denote the greatest number τ_i such that $t > \tau_i$ (the subscript τ of the expression $\theta_\tau(t)$ is omitted in [1]). Lemma 1 of [1] states that, whenever P is a discrete autonomous process, and t_0, t_1, i are natural numbers satisfying the conditions

$$t_0 < t_1, P(t_0) = P(t_1), \tau_i \geq t_0, \tau_{i+1} - \tau_i \geq t_1 - t_0,$$

then the equality $P(\theta_\tau(t)) = P(t)$ holds for $t = \tau_i + (t_1 - t_0)$.

The strictly increasing sequence of natural numbers τ is called a *DCL-sequence* (a sequence for detection of cyclic loops) iff, whenever P is a discrete autonomous process, and a cyclic loop is present in P at some moment from \mathbb{N} , then $P(\theta_\tau(t)) = P(t)$ for some integer $t > \tau_0$. It is shown in [1] that τ is a DCL-sequence iff the sequence $\{\tau_{i+1} - \tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ is unbounded.

¹ The terminology will be adopted at which the mentioned set \mathbb{N} is the set of the natural numbers (i. e. 0 is considered a natural number).

A DCL-sequence τ can be used for the detection of cyclic loops in the following way: when given a discrete autonomous process P , we look for the least integer $t > \tau_0$ satisfying the equality $P(\theta_\tau(t)) = P(t)$. Brent's method mentioned in the introduction consists in using in such a way the sequence $\{2^i - 1\}_{i=0}^\infty$, and the F-method proposed in [1] makes use of the sequence

$$(1) \quad 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, \dots,$$

consisting of the Fibonacci numbers with even subscripts.

Some additional definitions and statements will be given now.

Definition 1. A discrete autonomous process P will be called *cyclic* iff a cyclic loop is present in P at some moment from \mathbb{N} .

Definition 2. Let P be a cyclic discrete autonomous process, and τ be a DCL-sequence. We shall denote by $t_1(P)$ the earliest moment at which a cyclic loop is present in P . By $t_0(P)$ the natural number t_0 (obviously unique) will be denoted, which satisfies the conditions

$$t_0 < t_1(P), \quad P(t_0) = P(t_1(P)).$$

Let $t'_1(P)$ be the least integer t which is greater than τ_0 and satisfies the condition $P(\theta_\tau(t)) = P(t)$ (such a number t exists by the assumption that τ is a DCL-sequence). Then the difference $t'_1(P) - t_1(P)$ will be called *the delay of the detection of the loop in P by means of τ* .

Example 1. Let τ be the sequence $\{2^i - 1\}_{i=0}^\infty$, used by R. P. Brent, n be a natural number, and P be the sequence of natural numbers defined by the condition that $P(t)$ is the remainder of t modulo $2^n + 1$ for all t in \mathbb{N} . Then P is a cyclic discrete autonomous process, the equalities $t_1(P) = 2^n + 1$, $t'_1(P) = 2^{n+1} + 2^n$ hold, and hence the delay of the detection of the loop in P by means of τ is $2^{n+1} - 1 = 2t_1(P) - 3$.

The optimal property of the DCL-sequence (1), mentioned above, can be formulated as follows:

(i) if P is an arbitrary cyclic discrete autonomous process, then the delay of the detection of the loop in P by means of (1) is not greater than the number

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} (t_1(P) - 1);^2$$

(ii) whenever τ is a DCL-sequence, and a, b are real numbers such that for any cyclic discrete autonomous process P the delay of the detection of the loop in P by means of τ is not greater than $at_1(P) + b$, then the inequality

$$at + b \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (t - 1)$$

² Since $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots < 2$, it follows that using the F-method instead of the Brent's one will lead to a smaller delay of the detection of the loop in the discrete autonomous process P from Example 1 if the value of n is sufficiently large (in fact this will be the case whenever $n \geq 2$, and if $n = 0$ or $n = 1$ then the delay will be one and the same, no matter which one of both methods is used).

holds for all positive integers t .³

Lemma 1. *Let P be a discrete autonomous process, t_0, t_1, t'_0, t'_1 be natural numbers satisfying the conditions*

$$t_0 < t_1, t'_0 < t'_1, P(t_0) = P(t_1), P(t'_0) = P(t'_1),$$

and let $P(t) \neq P(t_0)$ for each integer t satisfying the inequalities $t_0 < t < t_1$. Then $t'_1 - t'_0 \geq t_1 - t_0$.

Proof. Whenever $t \in \mathbb{N}$ and $t \geq t_0$, then

$$P(t + (t_1 - t_0)) = P(t_1 + (t - t_0)) = P(t_0 + (t - t_0)) = P(t).$$

Hence $P(t + n(t_1 - t_0)) = P(t)$ for any such t and any natural number n . Let us choose the natural number n in such a way that the inequality $t_0 + n(t_1 - t_0) \geq t'_0$ holds, and hence

$$t_0 + n(t_1 - t_0) = t'_0 + h$$

for some h in \mathbb{N} . Then

$$P(t'_1 + h) = P(t'_0 + h) = P(t_0 + n(t_1 - t_0)) = P(t_0).$$

Now we set $t = t'_1 + h - n(t_1 - t_0)$. Then $t > t_0$ and the equalities $t + n(t_1 - t_0) = t'_1 + h$, $t - t_0 = t'_1 - t'_0$ hold. From the first of them we get

$$P(t) = P(t + n(t_1 - t_0)) = P(t'_1 + h) = P(t_0).$$

Therefore $t \geq t_1$, and hence, by the second of the same equalities,

$$t'_1 - t'_0 \geq t_1 - t_0. \blacksquare$$

Lemma 2. *Let P be a cyclic discrete autonomous process, τ be a DCL-sequence, and m be the least natural number i satisfying the inequalities*

$$(2) \quad \tau_i \geq t_0(P), \quad \tau_{i+1} - \tau_i \geq t_1(P) - t_0(P).$$

Then the delay of the detection of the loop in P by means of τ is equal to $\tau_m - t_0(P)$.

Proof. By the definitions of the number $t'_1(P)$ and of the function θ_τ , a natural number n exists, such that

$$\tau_n < t'_1(P) \leq \tau_{n+1}, \quad P(\tau_n) = P(t'_1(P)).$$

Moreover, for every integer t which satisfies the inequalities $\tau_n < t < t'_1(P)$, the inequality $P(t) \neq P(\tau_n)$ holds, since $\theta_\tau(t) = \tau_n$, and hence $P(\theta_\tau(t)) = P(\tau_n)$ for any such t . Using Lemma 1 and the definitions of $t_1(P)$ and $t_0(P)$, we get the inequality

$$t_1(P) - t_0(P) \geq t'_1(P) - \tau_n.$$

³ This optimal property of the sequence (1) does not mean that using (1) always guarantees a not greater delay of the loop detection than using any other DCL-sequence. For example, if the discrete autonomous process P is defined by the condition that $P(t)$ is the remainder of t modulo 14, then the delay of the detection of the loop by means of the F-method is equal to 21, whereas the delay of the detection of the loop by means of Brent's method is equal to 15.

An inequality in the opposite direction also follows from Lemma 1, since $P(t) \neq P(t_0(P))$ for any integer t satisfying the inequalities $t_0(P) < t < t_1(P)$. Therefore the equality

$$t_1(P) - t_0(P) = t'_1(P) - \tau_n$$

holds. From this equality we conclude that

$$t'_1(P) - t_1(P) = \tau_n - t_0(P),$$

i. e. the delay of the detection of the loop in P is equal to the difference $\tau_n - t_0(P)$. To complete the proof, we shall show that the equality $n = m$ holds. Since $t'_1(P) \geq t_1(P)$, it is clear that $\tau_n \geq t_0(P)$. Moreover, $\tau_{n+1} - \tau_n \geq t'_1(P) - \tau_n$, and thus n is one of the natural numbers i which satisfy the inequalities (2). Let j be an arbitrary one among these numbers, and let $t = \tau_j + (t_1(P) - t_0(P))$. Clearly, $t \geq \tau_0$, and Lemma 1 from [1] (recollected above) leads to the conclusion that the equality $P(\theta_\tau(t)) = P(t)$ holds. Therefore $t \geq t'_1(P)$, and hence $\tau_j \geq t'_1(P) - (t_1(P) - t_0(P)) = \tau_n$. This implies the needed inequality $j \geq n$. ■

Definition 3. If τ is a DCL-sequence, and t_0, t_1 are natural numbers satisfying the inequality $t_0 < t_1$, then we set

$$\mu_\tau(t_0, t_1) = \min \{i \in \mathbb{N} \mid \tau_i \geq t_0, \tau_{i+1} - \tau_i \geq t_1 - t_0\}$$

(this number is denoted by $i(t_0, t_1)$ in the proof of the corollary of Lemma 3 in [1]).

In the denotations of the above definition, the statement of Lemma 2 can be formulated as follows: if P is a cyclic discrete autonomous process and τ is a DCL-sequence, then the delay of the detection of the loop in P by means of τ is equal to the difference $\tau_{\mu_\tau(t_0, t_1)} - t_0$, where $t_0 = t_0(P)$, $t_1 = t_1(P)$.

3. AVERAGE DELAY OF THE DETECTION OF CYCLIC LOOPS BY MEANS OF A GIVEN DCL-SEQUENCE

Throughout this and the next section, a DCL-sequence τ will be supposed to be given.

Suppose t_1 is a positive integer, and P is a cyclic discrete autonomous process such that the equality $t_1(P) = t_1$ holds. Then the possible values of $t_0(P)$ are 0, 1, 2, ..., $t_1 - 1$, and if no additional information about the process P is available, we could assume that these values have equal probabilities. Together with the last paragraph of the previous section, this makes the following definition acceptable.

Definition 4. If t_1 is a positive integer, then the rational number

$$\delta_\tau(t_1) = \frac{1}{t_1} \sum_{t_0=0}^{t_1-1} (\tau_{\mu_\tau(t_0, t_1)} - t_0)$$

will be called *the average delay of detection by means of τ of the loops arising at the moment t_1* .

Obviously,

$$\delta_\tau(t_1) = \frac{1}{t_1} \sigma_\tau(t_1) - \frac{1}{2}(t_1 - 1),$$

where

$$\sigma_\tau(t_1) = \sum_{t_0=0}^{t_1-1} \tau_{\mu_\tau(t_0, t_1)}.$$

Hence the calculation of $\delta_\tau(t_1)$ can be reduced to the calculation of $\sigma_\tau(t_1)$.

Lemma 3. *Let t_1 be a positive integer, and j be the least natural number i satisfying the inequality $\tau_{i+1} \geq t_1$. Then the inequality*

$$(3) \quad \sigma_\tau(t_1) \geq \gamma \tau_j + (t_1 - \gamma) \tau_{j+1}$$

holds, where

$$\gamma = \begin{cases} \min \{ \tau_{j+1} - t_1, \tau_j \} + 1 & \text{if } \tau_1 > \tau_0 \\ \min \{ \tau_1 - \tau_0, t_1 \} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

An equality is present in the inequality (3) iff at least one of the following two cases is present:

(a) $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1$;

(b) $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1$ and $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - \tau_j - 1$.

A sufficient condition for the presence of an equality in (3) is the inequality $\tau_{j+2} \geq 2\tau_{j+1}$.

P r o o f. Let us consider an arbitrary integer t_0 , which satisfies the inequalities $0 \leq t_0 \leq t_1 - 1$. If for a certain natural number i the inequalities $\tau_i \geq t_0$ and $\tau_{i+1} - \tau_i \geq t_1 - t_0$ hold, then $\tau_{i+1} = (\tau_{i+1} - \tau_i) + \tau_i \geq t_1$, and hence $i \geq j$. Therefore the inequality $\mu_\tau(t_0, t_1) \geq j$ holds, and an equality is present in it iff the inequalities $\tau_j \geq t_0$, $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1 - t_0$ hold, i. e. iff $t_1 - \tau_{j+1} + \tau_j \leq t_0 \leq \tau_j$. Let

$$\alpha = \max \{ t_1 - \tau_{j+1} + \tau_j, 0 \}, \quad \beta = \min \{ \tau_j, t_1 - 1 \}.$$

Evidently, the inequalities $0 \leq \alpha \leq \beta \leq t_1 - 1$ hold. Hence the integers t_0 satisfying the conditions $0 \leq t_0 \leq t_1 - 1$ and $\mu_\tau(t_0, t_1) = j$ are exactly the integers t_0 satisfying the inequalities $\alpha \leq t_0 \leq \beta$. Consequently, there are exactly

$$\beta - \alpha + 1 = \beta + \min \{ -t_1 + \tau_{j+1} - \tau_j, 0 \} + 1$$

such integers. We shall show that in fact $\beta - \alpha + 1 = \gamma$, where γ is the number defined in the formulation of the lemma. If $t_1 > \tau_0$ then it is easily seen that $\tau_j < t_1$ (one has to consider separately the case when $j > 0$ and the case when $j = 0$). Therefore, if $t_1 > \tau_0$ then $\beta = \tau_j$ and hence

$$\beta - \alpha + 1 = \tau_j + \min \{ -t_1 + \tau_{j+1} - \tau_j, 0 \} + 1 = \min \{ -t_1 + \tau_{j+1}, \tau_j \} + 1 = \gamma.$$

On the other hand, if $t_1 \leq \tau_0$ then $j = 0$, $t_1 \leq \tau_j$, hence $\beta = t_1 - 1$ and therefore

$$\beta - \alpha + 1 = t_1 - 1 + \min \{ -t_1 + \tau_1 - \tau_0, 0 \} + 1 = \min \{ \tau_1 - \tau_0, t_1 \} = \gamma.$$

Thus there are exactly γ numbers t_0 in the set

$$\mathbb{N}(t_1) = \{0, 1, 2, \dots, t_1 - 1\}$$

which satisfy the condition $\mu_\tau(t_0, t_1) = j$. Of course, the equality $\tau_{\mu_\tau(t_0, t_1)} = \tau_j$ will also hold for them. For the remaining $t_1 - \gamma$ numbers t_0 in $\mathbb{N}(t_1)$ the inequality $\mu_\tau(t_0, t_1) \geq j + 1$ and hence the inequality $\tau_{\mu_\tau(t_0, t_1)} \geq \tau_{j+1}$ holds. Thus the inequality (3) is established. It is clear also that an equality will be present

in (3) iff all t_0 from $\mathbb{N}(t_1)$, violating the condition $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, satisfy the equality $\mu_\tau(t_0, t_1) = j + 1$. Making use of the definition of $\mu_\tau(t_0, t_1)$ and of the fact that $\tau_{j+1} > t_0$ for all t_0 in $\mathbb{N}(t_1)$ (since $\tau_{j+1} \geq t_1$), we see that an equality will be present in (3) iff all t_0 from $\mathbb{N}(t_1)$, violating the condition $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, satisfy the inequality $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - t_0$. A trivial possibility for this is that there are no t_0 from $\mathbb{N}(t_1)$ violating the condition $\alpha \leq t_0 \leq \beta$ at all. This happens iff $\alpha = 0$ and $\beta = t_1 - 1$, i. e. iff $t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j$ and $t_1 \leq \tau_j + 1$. If there is at least one t_0 in $\mathbb{N}(t_1)$ violating the condition $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, then the inequality $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - t_0$ is satisfied for all such t_0 iff it is satisfied for the least among them. If $\alpha > 0$, i. e. $t_1 > \tau_{j+1} - \tau_j$, then the least such t_0 is 0, whereas if $\alpha = 0$ and $\beta < t_1 - 1$, i. e. $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1 > \tau_j + 1$, then the least such t_0 is $\beta + 1 = \tau_j + 1$. And so we showed that an equality is present in (3) iff at least one of the following three cases is present:

- (i) $t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j$ and $t_1 \leq \tau_j + 1$;
- (ii) $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 > \tau_{j+1} - \tau_j$;
- (iii) $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1 > \tau_j + 1$ and $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - \tau_j - 1$.

But it can be easily verified that the disjunction of (i), (ii) and (iii) is equivalent to the disjunction of (a) and (b) from the formulation of the lemma (since the implications (i) \implies (b), (ii) \implies (a), (iii) \implies (b), (a) \implies (ii) \vee (i) \vee (iii) and (b) \implies (i) \vee (iii) hold). Finally, if the inequality $\tau_{j+2} \geq 2\tau_{j+1}$ holds, then $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq \tau_{j+1} \geq t_1$ and hence the case (a) is present. ■

Remark 1. If the sequence $\{\tau_{i+1} - \tau_i\}_{i=0}^\infty$ is monotonically increasing then the implication (b) \implies (a) holds. Thus in this case an equality is present in (3) iff the case (a) is present.

Corollary 1. Let $t_1 \in \mathbb{N}$, $t_1 > \tau_0$, and j be the least natural number i satisfying the inequality $\tau_{i+1} \geq t_1$. Then:

(A) If $t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j$ then

$$(4) \quad \sigma_\tau(t_1) \geq \tau_{j+1}t_1 - (\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j),$$

and an equality is present in (4) iff $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - \tau_j - 1$, the inequality $\tau_{j+2} \geq 2(\tau_{j+1} - \tau_j) - 1$ being sufficient for this

(B) If $t_1 > \tau_{j+1} - \tau_j$ then

$$(5) \quad \sigma_\tau(t_1) \geq (2\tau_{j+1} - \tau_j)t_1 - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)$$

and an equality is present in (5) iff $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1$, the inequality $\tau_{j+2} \geq 2\tau_{j+1}$ being sufficient for this.

Remark 2. In the case when $t_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$ the values of the right-hand sides of the inequalities (4) and (5) are equal.

Example 2. Let τ be the sequence $\{2^i - 1\}_{i=0}^\infty$, and let the integer t_1 satisfy the inequalities $2^j \leq t_1 < 2^{j+1}$, where $j \in \mathbb{N}$. Obviously $\tau_{i+1} = 2\tau_i + 1 > 2\tau_i$ for all i in \mathbb{N} . Then Corollary 1 yields the equality

$$\sigma_\tau(t_1) = (3 \cdot 2^j - 1)t_1 - 2^{2j+1}$$

(to obtain this equality in the case when $t_1 = 2^j$ it is convenient to use also Remark 2). From the above equality we get

$$\delta_\tau(t_1) = 2^j \left(3 - \frac{2^{j+1}}{t_1} \right) - \frac{1}{2}(t_1 + 1).$$

Making use of the methods of the infinitesimal calculus, it is easy to obtain the following inequalities from the above result:

$$\frac{1}{2}(t_1 - 1) \leq \delta_r(t_1) < \frac{5}{8}t_1 - \frac{1}{2}$$

(an equality is present in the left of them iff $t_1 = 2^j$).

Example 3. Let τ be the sequence (1), i. e.

$$\tau_i = \varphi_{2i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

where $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$ for $n > 1$. Then

$$\tau_{i+1} - \tau_i = \varphi_{2i+2} - \varphi_{2i} = \varphi_{2i+1} > \varphi_{2i} = \tau_i,$$

hence $\tau_{i+1} > 2\tau_i$ for all i in \mathbb{N} . Now let the integer t_1 satisfy the inequalities $\varphi_l < t_1 \leq \varphi_{l+1}$, where $l \in \mathbb{N}$. By application of Corollary 1 we get the equality

$$\sigma_r(t_1) = \varphi_{l+2}t_1 - \varphi_q(\varphi_r + 1),$$

where q and r are the odd and the even one, respectively, among the numbers l and $l + 1$ (part (A) of the corollary is applied in the case when l is even and part (B) is applied in the opposite case). Of course, the above equality implies the equality

$$\delta_r(t_1) = \varphi_{l+2} - \frac{\varphi_q(\varphi_r + 1)}{t_1} - \frac{1}{2}(t_1 - 1).$$

From this result easily follows that again the inequality

$$\frac{1}{2}(t_1 - 1) \leq \delta_r(t_1)$$

holds (an equality is now present in it iff some of the equalities $t_1 = \varphi_q, t_1 = \varphi_r + 1$ holds, i. e. in the case when l is even and some of the equalities $t_1 = \varphi_{l+1}, t_1 = \varphi_{l+1}$ holds).

In the above examples we have the case of $\tau_0 = 0$. For the case of $\tau_0 > 0$ the following complement to Corollary 1 can be made.

Corollary 1'. Let t_1 be an integer satisfying the inequalities $0 < t_1 \leq \tau_0$. Then:

(A') If $t_1 \leq \tau_1 - \tau_0$ then

$$(4') \quad \sigma_r(t_1) = \tau_0 t_1.$$

(B') If $t_1 > \tau_1 - \tau_0$ then

$$(5') \quad \sigma_r(t_1) \geq \tau_1 t_1 - (\tau_1 - \tau_0)^2,$$

and an inequality is present in (5') iff $\tau_2 - \tau_1 \geq t_1$, the inequality $\tau_2 \geq \tau_1 + \tau_0$ being sufficient for this.

Remark 2'. In the case when $t_1 = \tau_1 - \tau_0$ the values of the right-hand sides of the inequalities (4') and (5') are equal.

Now we shall prove the general validity of that inequality which occurs in both Example 2 and Example 3.

Theorem 1. For any positive integer t_1 the inequality

$$(6) \quad \delta_r(t_1) \geq \frac{1}{2}(t_1 - 1)$$

holds, and an equality is present in (6) iff for some natural number j satisfying the inequality

$$(7) \quad \tau_{j+1} \geq 2\tau_j + 1$$

at least one of the following two cases is present:

$$(I) \quad t_1 = \tau_j + 1;$$

$$(II) \quad t_1 = \tau_{j+1} - \tau_j \text{ and } \tau_{j+2} \geq 2(\tau_{j+1} - \tau_j) - 1.$$

P r o o f. The inequality (6) is equivalent to the inequality

$$(8) \quad \sigma_r(t_1) \geq t_1(t_1 - 1),$$

and an equality is present in (6) iff an equality is present in (8). To prove the inequality (8) and to study when an equality is present in it, we shall use the following fact: for any two real numbers a and b and any t_1 , satisfying the condition $a \leq t_1 \leq b$, the inequality

$$(9) \quad (a + b - 1)t_1 - ab \geq t_1(t_1 - 1)$$

holds, and an equality is present in it iff $t_1 = a$ or $t_1 = b$.⁴ Now let t_1 be an arbitrary positive integer. To prove the statement of the theorem for it, we shall consider several cases.

We shall first study the case when $t_1 > \tau_0$. Let j be the least natural number i satisfying the inequality $\tau_{i+1} \geq t_1$.

Suppose first that

$$(10) \quad t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j.$$

Then the inequality (4) holds, as well as the inequalities

$$(11) \quad \tau_j + 1 \leq t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j.$$

Making use of the above formulated fact for

$$a = \tau_j + 1, \quad b = \tau_{j+1} - \tau_j,$$

we get the inequality

$$(12) \quad \tau_{j+1}t_1 - (\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j) \geq t_1(t_1 - 1),$$

and this inequality together with (4) implies the needed inequality (8). Obviously, the inequalities (11) imply the inequality (7). An equality will be present in (8) iff an equality is present in each of the inequalities (4) and (12). This is equivalent to the requirement that the inequality $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq t_1 - \tau_j - 1$ holds together with some of the equalities $t_1 = \tau_j + 1$, $t_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$. The above inequality is

⁴ This is an obvious consequence of the equality

$$t_1(t_1 - 1) - ((a + b - 1)t_1 - ab) = (t_1 - a)(t_1 - b).$$

obviously satisfied for $t_1 = \tau_j + 1$, and it is equivalent to $\tau_{j+2} \geq 2(\tau_{j+1} - \tau_j) - 1$ for $t_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$. Thus $\tau_{j+1} \geq 2\tau_j + 1$ in the considered situation and an equality is present in (8) iff some of the cases (I) and (II) is present.

Now, remaining in the case when $t_1 > \tau_0$, we shall suppose that

$$t_1 > \tau_{j+1} - \tau_j.$$

Then the inequality (5) holds, as well as the inequalities

$$\tau_{j+1} - \tau_j < t_1 < \tau_{j+1} + 1.$$

Applying the inequality (9) for $a = \tau_{j+1} - \tau_j$, $b = \tau_{j+1} + 1$ together with the information when an equality is present in it, we get the inequality

$$(2\tau_{j+1} - \tau_j)t_1 - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1) > t_1(t_1 - 1).$$

From this inequality and the inequality (5) we conclude that

$$\sigma_\tau(t_1) > t_1(t_1 - 1),$$

i. e. (8) holds again, but without the possibility of an equality in it.

Now we go to the case when $t_1 \leq \tau_0$. If $t_1 \leq \tau_1 - \tau_0$ then the equality (4') holds, and hence the inequality (8) holds again without the possibility of an equality in it. Suppose $t_1 > \tau_1 - \tau_0$. Then the inequality (5') holds, and since

$$\tau_1 t_1 - t_1(t_1 - 1) = t_1(\tau_1 - (t_1 - 1)) > (\tau_1 - \tau_0)^2$$

in this case, we again see that (8) holds without the possibility of an equality in it.

So we proved that the inequality (8) is always true and an equality is present in it iff the inequalities $t_1 > \tau_0$ and (10) are present together with some of the cases (I) and (II) when j is the least natural number i satisfying the inequality $\tau_{i+1} \geq t_1$. Moreover, we showed that the inequality (7) holds for this j if an equality is present in (8). Suppose now that j is an arbitrary natural number, such that (7) holds and some of the cases (I) and (II) is present. If we succeed to show that j is the least natural number i satisfying the inequality $\tau_{i+1} \geq t_1$, and the inequalities $t_1 > \tau_0$ and (10) hold, then we shall be able to apply the above result and to conclude that an equality is present in (8). But it is just this case, since (7) implies that

$$\tau_j < \tau_j + 1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j \leq \tau_{j+1}. \blacksquare$$

Remark 3. If the sequence $\{\tau_{i+1} - \tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ is monotonically increasing, then the inequality $\tau_{j+2} \geq 2(\tau_{j+1} - \tau_j) - 1$ (occurring in Corollary 1 and Theorem 1) will be surely satisfied, since $\tau_{j+2} - \tau_{j+1} \geq \tau_{j+1} - \tau_j$ implies

$$\tau_{j+2} \geq 2\tau_{j+1} - \tau_j > 2(\tau_{j+1} - \tau_j) - 1.$$

Consequently, if the sequence $\{\tau_{i+1} - \tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ is monotonically increasing, then the inequality sign in (4) can be replaced by an equality sign, and the case (II) in Theorem 1 can be characterized simply by the equality $t_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$.

4. ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE AVERAGE DELAY OF THE DETECTION OF CYCLIC LOOPS BY MEANS OF DCL-SEQUENCES

Theorem 1 shows that

$$\liminf_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \liminf_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1 - 1} \geq \frac{1}{2}.$$

Sufficient conditions will be given now for having an equality in the above inequality.

Theorem 2. *Let infinitely many natural numbers i exist, such that $\tau_{i+1} \geq 2\tau_i$.*

Then

$$(13) \quad \liminf_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \frac{1}{2}.$$

PROOF. An infinite sequence of positive integers j can be found satisfying the inequality $\tau_{j+2} \geq 2\tau_{j+1}$. For each of them, applying Corollary 1 for $t_1 = \tau_{j+1}$, we conclude that

$$\sigma_\tau(\tau_{j+1}) = (2\tau_{j+1} - \tau_j)\tau_{j+1} - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1) = \tau_{j+1}(\tau_{j+1} - 1) + \tau_j,$$

and, consequently,

$$\delta_\tau(\tau_{j+1}) = \frac{1}{2}(\tau_{j+1} - 1) + \frac{\tau_j}{\tau_{j+1}},$$

$$\frac{\delta_\tau(\tau_{j+1})}{\tau_{j+1} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\tau_j}{\tau_{j+1}(\tau_{j+1} - 1)}.$$

Now it is sufficient to make use of the fact that

$$0 < \frac{\tau_j}{\tau_{j+1}(\tau_{j+1} - 1)} < \frac{1}{\tau_{j+1} - 1}$$

for all j in question, and, consequently, the corresponding sequence of values of $\frac{\delta_\tau(\tau_{j+1})}{\tau_{j+1} - 1}$ converges to $\frac{1}{2}$. ■

Example 4. If τ is the DCL-sequence (1), mentioned in Section 2, or the DCL-sequence $\{2^i - 1\}_{i=0}^\infty$, used in Brent's method, then, by Theorem 2, the equality (13) holds.

The next example shows that the equality (13) cannot be asserted without additional assumptions about the DCL-sequence τ .

Example 5. Let the DCL-sequence τ be determined by means of the equality

$$\tau_i = \frac{i(i+1)}{2}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

We shall show that $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = +\infty$. For that purpose consider an arbitrary positive integer t_1 and an arbitrary integer t_0 satisfying the inequalities $0 \leq t_0 \leq \frac{t_1}{3}$.

If we set $j = \mu_r(t_0, t_1)$, then $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1 - t_0 \geq \frac{2t_1}{3}$, i. e. $j + 1 \geq \frac{2t_1}{3}$ and hence $j \geq \frac{2t_1}{3} - 1$. From here we get

$$\tau_{\mu_r(t_0, t_1)} = \frac{j(j+1)}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2t_1}{3} - 1 \right) \frac{2t_1}{3} = \left(\frac{2t_1}{9} - \frac{1}{3} \right) t_1.$$

Therefore, whenever $t_1 > 1$ we have

$$\sigma_r t_1 \geq \sum_{t_0=0}^{\lfloor t_1/3 \rfloor} \tau_{\mu_r(t_0, t_1)} > \frac{t_1}{3} \left(\frac{2t_1}{9} - \frac{1}{3} \right) t_1,$$

and consequently

$$\frac{\delta_r(t_1)}{t_1} > \frac{1}{3} \left(\frac{2t_1}{9} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \frac{t_1 - 1}{t_1} > \frac{2t_1}{27} - \frac{11}{18}.$$

Under some assumptions, an expression for $\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_r(t_1)}{t_1}$ will be given.

Lemma 4. *Let a and b be integers such that $0 < a \leq b$. Let $t^* = \frac{2ab}{a+b-1}$, $\bar{t} = \lceil t^* \rceil$ if $a < b$, and $\bar{t} = a$ if $a = b$. Then*

$$(14) \quad \frac{(a+b-1)t - ab}{t^2} \leq \frac{(a+b-1)^2}{4ab}$$

for all non-zero real numbers t , and the integer \bar{t} satisfies the inequalities $a \leq \bar{t} \leq b$ and the inequality

$$(15) \quad \frac{(a+b-1)\bar{t} - ab}{\bar{t}^2} \geq \frac{(a+b-1)^2}{4ab} \left(1 - \frac{1}{\bar{t}^2} \right).$$

Moreover, if $b - a > 1$ then the strict inequalities $a < \bar{t} < b$ hold.

Proof. The inequality (14) is an immediate consequence of the fact that

$$(16) \quad \frac{(a+b-1)t - ab}{t^2} = \frac{(a+b-1)^2}{4ab} \left(1 - \frac{1}{t^2} \left(t - \frac{2ab}{a+b-1} \right)^2 \right)$$

for all non-zero real numbers t . If $a = b$ then (15) reduces to the easily verifiable inequality

$$\frac{(2a-1)a - a^2}{a^2} \geq \frac{(2a-1)^2}{4a^2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right).$$

Suppose now that $a < b$. Then

$$t^* - (a+1) = (a-1) \frac{b-a-1}{a+b-1} \geq 0, \quad b - t^* = b \frac{b-a-1}{a+b-1} \geq 0.$$

Consequently, the inequalities $a+1 \leq t^* \leq b$ hold, and $t^* < b$ in the case when $b - a > 1$. Thus

$$(17) \quad a < \bar{t} \leq b, \quad |\bar{t} - t^*| < 1,$$

and in fact we have $\bar{t} < b$ in the case when $b - a > 1$. Now it remains to note that (15) follows from the second of the inequalities (17) and the case $t = \bar{t}$ of the equality (16). ■

Theorem 3. Let $\tau_{i+1} \geq 2\tau_i$ for all sufficiently large natural numbers i . Then

$$(18) \quad \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \frac{1}{4} \max \left\{ \frac{L^2}{L-1}, \frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \right\} - \frac{1}{2},$$

where

$$L = \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad l = \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$$

(in the case when $L = +\infty$ the right-hand side of (18) is considered as denoting $+\infty$).

Proof. Let n be a natural number such that $\tau_{i+1} \geq 2\tau_i$ for all i greater than n . For all positive integers j we set

$$m_j = \max \left\{ \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \mid t_1 \in \mathbb{N}, \tau_j < t_1 \leq \tau_{j+1} \right\},$$

$$k_j = \frac{\tau_{j+1}}{\tau_j}, \quad M_j = \frac{1}{4} \max \left\{ \frac{k_j^2}{k_j - 1}, \frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} \right\}.$$

We shall prove the inequalities

$$(19) \quad M_j > m_j > M_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right)$$

for all j greater than n . Let $j > n$. To prove the first of the inequalities (19), we consider an arbitrary integer t_1 satisfying the conditions $\tau_j < t_1 \leq \tau_{j+1}$. If $t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j$ then, by part (A) of Corollary 1, the equality

$$(20) \quad \sigma_\tau(t_1) = \tau_{j+1}t_1 - (\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)$$

holds, and the inequality (14) from Lemma 4 with $a = \tau_j + 1$, $b = \tau_{j+1} - \tau_j$, $t = t_1$, yields

$$\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \leq \frac{\tau_{j+1}^2}{4(\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)} < \frac{\tau_{j+1}^2}{4\tau_j(\tau_{j+1} - \tau_j)} = \frac{1}{4} \frac{k_j^2}{k_j - 1} \leq M_j.$$

Suppose now that $t_1 > \tau_{j+1} - \tau_j$. Then, by part (B) of Corollary 1, the equality

$$(21) \quad \sigma_\tau(t_1) = (2\tau_{j+1} - \tau_j)t_1 - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)$$

holds. Using (14) with $a = \tau_{j+1} - \tau_j$, $b = \tau_{j+1} + 1$, $t = t_1$, we get

$$\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \leq \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)} < \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)\tau_{j+1}} = \frac{1}{4} \frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} \leq M_j.$$

Thus we proved that $\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} < M_j$ for any integer t_1 satisfying the inequalities $\tau_j < t_1 \leq \tau_{j+1}$, and hence the first of the inequalities (19) holds. To prove the

second one, it is sufficient to prove the existence of an integer t_1 satisfying the inequalities

$$(22) \quad \tau_j < t_1 \leq \tau_{j+1}, \quad \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} > M_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right).$$

The existence of such a t_1 will be proved first in the case when

$$\frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} \geq \frac{k_j^2}{k_j - 1}.$$

In this case we have the equality $M_j = \frac{1(2k_j - 1)^2}{4(k_j - 1)k_j}$. Again applying Lemma 4 with $a = \tau_{j+1} - \tau_j$, $b = \tau_{j+1} + 1$, we conclude that an integer t_1 exists satisfying the inequalities

$$(23) \quad \tau_{j+1} - \tau_j < t_1 < \tau_{j+1} + 1,$$

$$(24) \quad \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)t_1 - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)}{t_1^2} \geq \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)} \left(1 - \frac{1}{t_1^2}\right).$$

Since $\tau_j \leq \tau_{j+1} - \tau_j < t_1 \leq \tau_{j+1}$ for the same t_1 , part (B) of Corollary 1 shows the validity of the equality (21) for this t_1 , and hence the above inequality can be written in the form

$$(25) \quad \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \geq \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)} \left(1 - \frac{1}{t_1^2}\right).$$

Hence

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} &> \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)} \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right) \\ &> \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)^2}{4(\tau_{j+1} - \tau_j)\tau_{j+1}} \left(1 - \frac{1}{\tau_{j+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right) \\ &> \frac{1(2k_j - 1)^2}{4(k_j - 1)k_j} \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right). \end{aligned}$$

It remains to study the case when

$$\frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} < \frac{k_j^2}{k_j - 1}.$$

It is immediately seen that $k_j \neq 2$ in this case, and therefore $k_j > 2$. Hence $\tau_{j+1} > 2\tau_j$, and consequently $\tau_{j+1} \leq \tau_{j+1} - \tau_j$. Applying Lemma 4 with $a = \tau_j + 1$, $b = \tau_{j+1} - \tau_j$, we conclude that an integer t_1 exists, which satisfies the inequalities

$$\begin{aligned} \tau_j + 1 &\leq t_1 \leq \tau_{j+1} - \tau_j, \\ \frac{\tau_{j+1}t_1 - (\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)}{t_1^2} &\geq \frac{\tau_{j+1}^2}{4(\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)} \left(1 - \frac{1}{t_1^2}\right). \end{aligned}$$

By part (A) of Corollary 1, for the same t_1 also the equality (20) holds, and the above inequality can be written in the form

$$\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \geq \frac{\tau_{j+1}^2}{4(\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)} \left(1 - \frac{1}{t_1^2}\right).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} &\geq \frac{\tau_{j+1}^2}{4(\tau_j + 1)(\tau_{j+1} - \tau_j)} \left(1 - \frac{1}{(\tau_j + 1)^2}\right) \\ &> \frac{\tau_{j+1}^2}{4\tau_j(\tau_{j+1} - \tau_j)} \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{(\tau_j + 1)^2}\right) \\ &= M_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{(\tau_j + 1)^2}\right) > M_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right). \end{aligned}$$

So the validity of the inequalities (19) for all j greater than n is proved. This fact implies the equality

$$(27) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} m_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} M_j.$$

Obviously,

$$(28) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} m_j = \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2},$$

and it is easily seen that

$$(29) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} M_j = \frac{1}{4} \max \left\{ \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{k_j^2}{k_j - 1}, \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} \right\}.$$

Making use of the fact that $k_j \geq 2$ for all j greater than n and of the fact that $\frac{k^2}{k-1}$ is a monotonically increasing and continuous function of k when $k \geq 2$, it is easy to get the equality

$$(30) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{k_j^2}{k_j - 1} = \frac{L^2}{L - 1},$$

where the right-hand side is interpreted as $+\infty$ if $L = +\infty$. In a similar way we establish the equality

$$(31) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{(2k_j - 1)^2}{(k_j - 1)k_j} = \frac{(2l - 1)^2}{(l - 1)l},$$

where the right-hand side is interpreted as 4 if $l = +\infty$ (the fact is used that $\frac{(2k-1)^2}{(k-1)k}$ is a monotonically decreasing and continuous function of k for the considered values of k). Of course, we have also the equality

$$(32) \quad \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} - \frac{1}{2}.$$

Combining the equalities (27)—(32), we get the equality (18) which had to be proven. ■

Example 6. If τ is the DCL-sequence $\{2^i - 1\}_{i=0}^\infty$, used in Brent's method, then $L = l = 2$ and Theorem 3 yields:

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \frac{1}{4} \max \left\{ 4, \frac{9}{2} \right\} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

Corollary 2. Under the assumption of Theorem 3 the inequality

$$(33) \quad \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} \geq \frac{\sqrt{5}}{4}$$

holds, and an equality is present in it iff

$$(34) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Proof. In the denotations of Theorem 3 it will be proved that

$$(35) \quad \max \left\{ \frac{L^2}{L-1}, \frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \right\} \geq 2 + \sqrt{5}$$

and an equality is present in this inequality iff

$$(36) \quad L = l = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

For that purpose we note that

$$\frac{k^2}{k-1} = \frac{(2k-1)^2}{(k-1)k} = 2 + \sqrt{5}$$

for $k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Suppose now that

$$\max \left\{ \frac{L^2}{L-1}, \frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \right\} \leq 2 + \sqrt{5},$$

i. e. $\frac{L^2}{L-1} \leq 2 + \sqrt{5}$, $\frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \leq 2 + \sqrt{5}$. Making use of the last two inequalities

and of the fact that the monotonicity of the functions $\frac{k^2}{k-1}$ and $\frac{(2k-1)^2}{(k-1)k}$, which has been mentioned in the proof of Theorem 3, is a strict one, we conclude that

$L \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leq l$. Since $l \leq L$, this is possible only if the equalities (36) hold, and in that case

$$\max \left\{ \frac{L^2}{L-1}, \frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \right\} = 2 + \sqrt{5}.$$

Therefore the inequality

$$\max \left\{ \frac{L^2}{L-1}, \frac{(2l-1)^2}{(l-1)l} \right\} < 2 + \sqrt{5}$$

is impossible and an equality is present in (35) iff the equalities (36) hold. But the last condition is equivalent to the equality (34) and it remains only to apply the equality (18). ■

Remark 4. Since $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 2$, any DCL-sequence τ satisfying the condition (34) satisfies also the assumption of Theorem 3. As an example of a DCL-sequence τ satisfying (34), the sequence (1), mentioned in Section 2, can be indicated. Hence the equality

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0.559 \dots$$

holds if τ is the sequence (1). Having in mind Examples 4 and 6, we may conclude from the above fact that the F-method is in some sense better than the Brent's one with respect to the average delay of loop detection.

5. A PARTIAL GENERALIZATION OF COROLLARY 2

In Corollary 2 the inequality (33) has been proved under the assumption of Theorem 3 that $\tau_{i+1} \geq 2\tau_i$ for all sufficiently large natural numbers i . We shall show now that this assumption is in fact not needed for the validity of (33).

Theorem 4. *For any DCL-sequence τ the inequality (33) holds.*

P r o o f. The inequality (33) is equivalent to the following statement: whenever c is a real number less than $\frac{\sqrt{5}}{4}$, then $\frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} > c$ for infinitely many positive integers t_1 . And the validity of the above statement will be established by showing that for any sufficiently large natural number m a positive integer t_1 exists such that $t_1 > \tau_m$ and the inequality

$$(37) \quad \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{\tau_m} \right) \left(1 - \frac{1}{\tau_m^2} \right)$$

holds (since $\frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} > \frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} - \frac{1}{2}$, the inequality (37) implies the inequality

$$\frac{\delta_\tau(t_1)}{t_1} > \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{\tau_m} \right) \left(1 - \frac{1}{\tau_m^2} \right) - \frac{1}{2},$$

and the right-hand side of the last inequality converges to $\frac{\sqrt{5}}{4}$ when $m \rightarrow \infty$).

For the time being let m be an arbitrary positive integer. We choose an integer T greater than τ_m and satisfying the inequality

$$(38) \quad \frac{(T - \tau_m)(T - \tau_m + 1)}{T^2} > \frac{3}{4}$$

(such an integer T can be found since the left-hand side of (38) converges to 1 when $T \rightarrow \infty$. Two cases will be studied separately.

Case 1. For any integer t_0 , satisfying the inequalities $\tau_m \leq t_0 < T$, the inequality $\tau_{\mu_r(t_0, T)+1} \leq \frac{5}{4}\tau_{\mu_r(t_0, T)}$ holds. For any such t_0 if we set $j = \mu_r(t_0, T)$, then we have

$$T - t_0 \leq \tau_{j+1} - \tau_j \leq \frac{5}{4}\tau_j - \tau_j = \frac{1}{4}\tau_j,$$

hence $\tau_j \geq 4(T - t_0)$. Thus $\tau_{\mu_r(t_0, T)} \geq 4(T - t_0)$ for any integer t_0 , satisfying the inequalities $\tau_m \leq t_0 < T$. Therefore

$$\frac{\sigma_r(T)}{T^2} \geq \frac{1}{T^2} \sum_{t_0=\tau_m}^{T-1} \tau_{\mu_r(t_0, T)} \geq \frac{4}{T^2} \sum_{t_0=\tau_m}^{T-1} (T - t_0) = 2 \frac{(T - \tau_m)(T - \tau_m + 1)}{T^2} > \frac{3}{2},$$

and since $\frac{3}{2} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$, the inequality (37) will be surely satisfied for $t_1 = T$.

Case 2. There is an integer t_0 , satisfying the inequalities $\tau_m \leq t_0 < T$ and the inequality $\tau_{\mu_r(t_0, T)+1} > \frac{5}{4}\tau_{\mu_r(t_0, T)}$. We choose such an integer t_0 and set $j = \mu_r(t_0, T)$. Then $\tau_{j+1} > \frac{5}{4}\tau_j$, $\tau_j \geq t_0 \geq \tau_m$. Three subcases will be considered separately.

Subcase 2.1. The inequality $\tau_{j+1} < \frac{7}{4}\tau_j$ holds. We shall show that for all sufficiently large values of m the inequality (37) will be satisfied by $t_1 = \tau_j + 1$. Indeed, let $t_1 = \tau_j + 1$. Since $\tau_{j+1} - \tau_j < \frac{3}{4}\tau_j < t_1$, part (B) of Corollary 1 can be applied and the validity of the inequality (5) is seen. From here we get

$$\frac{\sigma_r(t_1)}{t_1^2} \geq \frac{(2\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_j + 1) - (\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)}{(\tau_j + 1)^2}.$$

Since $\frac{5}{4}\tau_j < \tau_{j+1} < \frac{7}{4}\tau_j$, let us consider the function

$$\psi(t) = (2t - \tau_j)(\tau_j + 1) - (t - \tau_j)(t + 1)$$

for $\frac{5}{4}\tau_j \leq t \leq \frac{7}{4}\tau_j$. This function is concave and the inequalities $\psi\left(\frac{5}{4}\tau_j\right) > \frac{19}{16}\tau_j^2$, $\psi\left(\frac{7}{4}\tau_j\right) > \frac{19}{16}\tau_j^2$ can be easily verified. Therefore the inequality $\psi(\tau_{j+1}) > \frac{19}{16}\tau_j^2$ also holds and consequently

$$\frac{\sigma_r(t_1)}{t_1^2} > \frac{19}{16} \frac{\tau_j^2}{(\tau_j + 1)^2}.$$

Since $\frac{19}{16} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ and $\tau_j \geq \tau_m$, it is clear that $t_1 > \tau_m$ and, for all sufficiently large values of m , the made choice of t_1 guarantees the inequality

$$\frac{\sigma_r(t_1)}{t_1^2} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4},$$

and hence also the inequality (37).

Subcase 2.2. The inequalities $\frac{7}{4}\tau_j \leq \tau_{j+1} < 2\tau_j$ hold. Let $a = \tau_{j+1} - \tau_j$, $b = \tau_{j+1} + 1$, and let $t_1 = \bar{t}$, where \bar{t} is constructed as in Lemma 4, i. e. $t_1 = [t^*]$, where

$$t^* = \frac{2(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} + 1)}{2\tau_{j+1} - \tau_j}.$$

We shall show that the inequalities $t_1 > \tau_m$ and (37) will be satisfied by this t_1 if m is sufficiently large. We have

$$\begin{aligned} t^* - (\tau_j + 1) &= \frac{2(\tau_{j+1} - \tau_j)^2 - \tau_j(\tau_j + 1)}{2\tau_{j+1} - \tau_j} \\ &\geq \frac{2\left(\frac{3}{4}\tau_j\right)^2 - \tau_j(\tau_j + 1)}{2\tau_{j+1} - \tau_j} = \frac{\tau_j(\tau_j - 8)}{8(2\tau_{j+1} - \tau_j)}. \end{aligned}$$

Supposing that $\tau_m \geq 8$, we see that $t^* \geq \tau_j + 1$, and consequently $t_1 \geq \tau_j + 1 > \tau_m$. By Lemma 4 we have the inequalities (23) and (24). Then part (B) of Corollary 1 yields also the inequality (5), and we get the inequality (25). As in the proof of Theorem 3, from (25) we obtain the inequalities (26), i. e.

$$\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} > \frac{1(2k_j - 1)^2}{4(k_j - 1)k_j} \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right)$$

with $k_j = \frac{\tau_{j+1}}{\tau_j}$. Since we have the inequalities $1 < k_j < 2$ and $\frac{(2k - 1)^2}{(k - 1)k}$ is a monotonically decreasing function of k for $k > 1$, it follows that

$$\frac{\sigma_\tau(t_1)}{t_1^2} > \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) \left(1 - \frac{1}{\tau_j^2}\right).$$

Taking into account that $\frac{9}{8} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$, we again see the validity of the inequality (37).

Subcase 2.3. The inequality $\tau_{j+1} \geq 2\tau_j$ holds. Then, defining M_j in the same way as in the proof of Theorem 3, we can prove the existence of an integer t_1 satisfying the inequalities (22). The only difference in the proof is that we have to use the inequalities (4) and (5) instead of equalities (20) and (21). Clearly, this t_1 will be greater than τ_m . To show that the inequality (37) will be also satisfied, it is sufficient to prove the inequality

$$M_j \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

But this follows from certain already mentioned properties of the functions $\frac{k^2}{k-1}$ and $\frac{(2k-1)^2}{(k-1)k}$, namely from the fact that the first of these functions is monotonically increasing for $k \geq 2$, the second one is monotonically decreasing, and both functions have the value $2 + \sqrt{5}$ for $k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. ■

Theorem 4 is only a partial generalization of Corollary 2, since this theorem gives no information about the cases when an equality is present in the inequality (33). Remark 4 shows that the condition (34) is a sufficient condition for having an equality in (33). Although this sufficient condition is also a necessary one under the assumption of Theorem 3 (as stated in Corollary 2), we shall give now an example showing that (34) is not a necessary condition for (33) in the general case.

Example 7. Suppose τ is a DCL-sequence satisfying the condition (34), such that $\tau_{j+1} - \tau_j > 1$ holds for all i in \mathbb{N} (such a sequence τ is, for instance, the sequence obtained from (1) by omitting its initial term). We define a new sequence $\bar{\tau}$ by setting

$$\bar{\tau}_{2k} = \tau_k, \quad \bar{\tau}_{2k+1} = \tau_k + 1.$$

The sequence $\bar{\tau}$ is obviously a DCL-sequence again, but the condition $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{\tau}_{i+1}}{\bar{\tau}_i} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ is not satisfied. Nevertheless, we shall establish the equality

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\bar{\tau}}(t_1)}{t_1} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

For that purpose we shall first show that

$$(39) \quad \delta_{\bar{\tau}}(t_1) \leq \frac{\tau_{\mu_{\tau}(0, t_1+1)} + 1}{t_1} + \delta_{\tau}(t_1)$$

for any integer t_1 greater than 1. We have the equality

$$\delta_{\bar{\tau}}(t_1) = \frac{1}{t_1} \sum_{t_0=0}^{t_1-1} (\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0),$$

where

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \bar{\tau}_i \geq t_0, \bar{\tau}_{i+1} - \bar{\tau}_i \geq t_1 - t_0\}.$$

Let t_1 be an arbitrary integer greater than 1. If $t_1 - t_0 > 1$ then the inequality $\bar{\tau}_{i+1} - \bar{\tau}_i \geq t_1 - t_0$ is possible only for odd values of i and therefore

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, \tau_k + 1 \geq t_0, \tau_{k+1} - (\tau_k + 1) \geq t_1 - t_0\},$$

i. e.

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, \tau_k \geq t_0 - 1, \tau_{k+1} - \tau_k \geq t_1 - (t_0 - 1)\}.$$

Hence

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = 2\mu_{\tau}(t_0 - 1, t_1) + 1,$$

$$\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0 = (\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0-1, t_1)} + 1) - t_0 = \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0-1, t_1)} - (t_0 - 1)$$

whenever $0 < t_0 < t_1 - 1$, and for $t_0 = 0$ we have

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, \tau_{k+1} - \tau_k \geq t_1 + 1\} = 2\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1 + 1) + 1,$$

$$\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0 = \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} + 1.$$

To calculate the value of $\delta_{\bar{\tau}}(t_1)$, it remains to calculate the difference $\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0$ for $t_0 = t_1 - 1$. In this case the inequality $\bar{\tau}_{i+1} - \bar{\tau}_i \geq t_1 - t_0$ is satisfied for all i in \mathbb{N} , and therefore

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \bar{\tau}_i \geq t_0\}.$$

If $t_1 - 1 = \tau_k + 1$ for some k in \mathbb{N} , then $t_0 = \bar{\tau}_{2k+1}$ and hence

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = 2k + 1, \quad \bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0 = \bar{\tau}_{2k+1} - t_0 = 0.$$

Let $t_1 - 1$ be not of the form $\tau_k + 1$. Then $\bar{\tau}_{2k+1} \geq t_0$ is equivalent to $\bar{\tau}_{2k} \geq t_0$ for any k in \mathbb{N} , and hence

$$\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1) = \min\{2k \mid k \in \mathbb{N}, \tau_k \geq t_0\} = 2\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1),$$

$$\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0 = \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0.$$

Thus

$$\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0 \leq \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0,$$

whenever $t_0 = t_1 - 1$. And so we have

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\tau}}(t_1) &= \frac{1}{t_1} \left(\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1)} + \sum_{t_0=1}^{t_1-2} (\bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0) + \bar{\tau}_{\mu_{\bar{\tau}}(t_1-1, t_1)} - (t_1 - 1) \right) \\ &\leq \frac{1}{t_1} \left(\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} + 1 + \sum_{t_0=1}^{t_1-2} (\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0-1, t_1)} - (t_0 - 1)) + \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_1-1, t_1)} - (t_1 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{t_1} \left(\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} + 1 + \sum_{t_0=0}^{t_1-3} (\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0) + \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_1-1, t_1)} - (t_1 - 1) \right) \\ &\leq \frac{1}{t_1} \left(\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} + 1 + \sum_{t_0=0}^{t_1-1} (\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(t_0, t_1)} - t_0) \right) = \frac{\tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} + 1}{t_1} + \delta_{\bar{\tau}}(t_1). \end{aligned}$$

Thus we established the validity of (39) for all integers t_1 greater than 1. Now we shall show that

$$(40) \quad \tau_{\mu_{\bar{\tau}}(0, t_1+1)} \leq 2t_1$$

for all sufficiently large positive integers t_1 . To show this, we make use of the assumption (34) and choose such a number m in \mathbb{N} that $\tau_{i+1} \geq 2\tau_i$ whenever $i \geq m$. Let $t_1 \geq \tau_{m+1}$ and $j = \mu_{\bar{\tau}}(0, t_1 + 1)$. By definition,

$$(41) \quad j = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \tau_{i+1} - \tau_i \geq t_1 + 1\}.$$

Hence $\tau_{j+1} - \tau_j \geq t_1 + 1$, and this inequality together with the inequalities $\tau_{j+1} \geq \tau_{j+1} - \tau_j$, $t_1 \geq \tau_{m+1}$ enables us to conclude that $\tau_{j+1} > \tau_{m+1}$ and therefore

$j > m$. Thus $j-1 \geq m$ and consequently $j-1 \in \mathbb{N}$. Therefore (41) implies the inequality $\tau_j - \tau_{j-1} \leq t_1$. The inequality $j-1 \geq m$ guarantees also that $\tau_j \geq 2\tau_{j-1}$. Hence $\tau_j \leq 2(\tau_j - \tau_{j-1}) \leq 2t_1$, i. e. the inequality (40) holds. Thus we proved that all sufficiently large positive integers t_1 satisfy the inequalities (39) and (40). Consequently, for all such t_1 the inequality

$$\frac{\delta_{\overline{\tau}}(t_1)}{t_1} \leq \frac{2t_1 + 1}{t_1^2} + \frac{\delta_{\tau}(t_1)}{t_1}$$

holds, and therefore

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\overline{\tau}}(t_1)}{t_1} \leq \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\tau}(t_1)}{t_1}.$$

Since

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\overline{\tau}}(t_1)}{t_1} \geq \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\tau}(t_1)}{t_1} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

by Theorem 4 and Corollary 2, respectively, we conclude that the equality

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\overline{\tau}}(t_1)}{t_1} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

holds indeed.

REFERENCES

1. Skordev, D. G. An extremal problem concerning the detection of cyclic loops. — C. R. Acad. Bulg. Sci., 40, no. 10, 1987, 5-8.
2. Knuth, D. E. The Art of Computer Programming. Vol. 2: Seminumerical Algorithms. First Edition, Reading, Mass., 1969. Second Edition, Reading, Mass., 1981.
Russian translation:
К н у т, Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2: Получисленные алгоритмы. Москва, 1977.

Received 18.03.1992

SOME REMARKS ON THE STRICTLY POSITIVE MEASURES

GEORGE ALEXANDROV

Георги Александров. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СТРОГО ПОЗИТИВНЫХ МЕР

Показано, что если K компакт Гротендика, тогда K имеет строго положительную меру тогда и только тогда, когда существует непрерывный линейный инъективный оператор $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$.

George Alexandrov. SOME REMARKS ON THE STRICTLY POSITIVE MEASURES

It is shown that if K is a Grothendieck compact space, then K admits a strictly positive measure if and only if there exists a linear bounded one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$.

1. INTRODUCTION

A finite nonnegative regular Borel measure μ on the compact Hausdorff space K is called *strictly positive* if $\mu(U) > 0$ for every nonempty open subset U of K .

A compact Hausdorff space K is called *Grothendieck-compact* if the space $C(K)$ is the Grothendieck space, i. e. the weak* and weak convergence of sequences coincide in $C(K)^*$.

A compact Hausdorff space K is *extremally disconnected* if the closure of every open subset of K is open-and-closed (for the remaining definitions see below).

Every extremally disconnected compact space is a Grothendieck compact space.

It is known that if a compact space K has a strictly positive measure, then there exists a bounded linear one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$ ([2], p. 179). Therefore the space $C(K)$ admits an equivalent strictly convex norm ([3], p. 101).

The converse is not true. Argyros, Mercourakis and Negreponitis ([1], Theorem 1. 11) proved the existence of a bounded linear one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$ and so $C(K)$ has an equivalent strictly convex norm for the known example of Gaifman (see [2], Theorem 6. 23) of a compact Hausdorff space K without a strictly positive measure.

However, on the class of extremally disconnected compact spaces we have the following

Theorem ([1]). *Let K be an extremally disconnected compact space. Then K admits a strictly positive measure if and only if there exists a linear bounded one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$.*

Naturally, the question arises: Is there a class of compact spaces, essentially wider than the class of extremally disconnected compact space, for which this theorem holds?

Here we give the positive answer to this question.

2. DEFINITIONS, NOTATIONS AND SOME PROPOSITIONS

If $(X, \|\cdot\|)$ is a Banach space, X^* denotes its dual; $X^* = \{x^* : X \rightarrow \mathbb{R} : x^* \text{ is linear and continuous}\}$.

The weak* topology on X^* is the topology induced on X^* by X , i. e. $x_i^* \rightarrow x^*$ is weak* convergent in X^* if $x_i^*(x) \rightarrow x^*(x)$ for all $x \in X$.

The unit ball of a Banach space X is denoted by $B_1(X)$; thus $B_1(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

If $T: X \rightarrow Y$ is a linear bounded operator between Banach spaces, then $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ is the conjugate operator of T given by $T^*(y^*) = y^* \circ T$ for all $y^* \in Y^*$. Every conjugate operator T^* is weak*-weak* continuous.

A norm $\|\cdot\|$ of a Banach space X is strictly convex, if for all $x, y \in X$ with $\|x\| = \|y\| = 1$ we have $\|(x+y)/2\| < 1$ whenever $x \neq y$.

The subset $A \subset X^*$ is total if the linear closure $\text{lin}(A)$ of A is a total subspace, i. e. if $x \in X$ and we have $x^*(x) = 0$ for all $x^* \in \text{lin}(A)$, then $x = 0$.

Given a compact Hausdorff space K , $C(K)$ denotes the space of all real-valued continuous functions on K with supremum norm.

Given a set Γ , $l_\infty(\Gamma)$ denotes the Banach space of all bounded functions $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, with $\|f\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$, and $c_0(\Gamma) = \{f \in l_\infty(\Gamma) : \text{for all } \epsilon > 0 \{ \gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| > \epsilon \} \text{ is finite}\}$. Also, $l_1(\Gamma)$ denotes the Banach space of all functions $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)| < \infty$ with the norm $\|f\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$.

The support of a nonnegative regular Borel measure μ on the compact Hausdorff space K , denoted by $\text{supp}(\mu)$, is the set of all $x \in K$ for which $\mu(U) > 0$ for every open set U containing x . The support of a measure is a closed subset of K . It is clear that if a nonnegative regular Borel measure μ is strictly positive, then $\text{supp}(\mu) = K$.

Proposition (Rosenthal [6]). *Let K be a compact Hausdorff space. Then K admits a strictly positive measure if and only if $C(K)^*$ contains a weakly compact total subset.*

A compact Hausdorff space K is called Rosenthal-compact if K is homeomorphic to a subspace of the space of functions of the first Baire class with the pointwise convergence for some complete separable metric space.

The Rosenthal-compact spaces are introduced by H. Rosenthal in connection with the characterization of the Banach spaces isomorphically containing $l_1(\mathbb{N})$ (\mathbb{N} denote the set of positive integers) [7]. The class of these compact spaces extends in a natural way the class of metrizable compact spaces.

Proposition (Godefroy [4]). *Let K be a Rosenthal-compact space and μ is a nonnegative regular Borel measure, then the $\text{supp}(\mu)$ is a separable space.*

3. RESULTS

Theorem 1. *Let K be a Grothendieck-compact. Then K admits a strictly positive measure if and only if there exists a linear bounded one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$.*

Proof. We need to prove only the "if" part. Let $T: C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$ be a linear bounded one-to-one operator and let $T^*: l_1(\Gamma) \rightarrow C(K)^*$ be the conjugate operator of T .

The unite ball $B_1 = B_1(l_1(\Gamma))$ of the space $l_1(\Gamma)$ is weak*-sequentially compact. Then $T^*(B_1)$ is also weak*-sequentially compact, because the conjugate operator T^* is weak*-weak* continuous. Since K is a Grothendieck-compact space, then on the set $T^*(B_1)$ the weak* and weak convergence of sequences coincide and, consequently, $T^*(B_1)$ is a weak compact.

On the other hand, $T^*(B_1)$ is a total set, because $T^*(l_1(\Gamma))$ ($T^*(l_1(\Gamma))$ is a linear closure of $T^*(B_1)$) is a total subspace in $C(K)^*$.

Really, let $f \in C(K)$ and $(T^*g)(f) = 0$ for all $g \in l_1(\Gamma)$. Since

$$(T^*g)(f) = g(Tf) = 0, \quad \forall g \in l_1(\Gamma),$$

and $l_1(\Gamma)$ is a dual space to the space $c_0(\Gamma)$, then $Tf = 0$. However, the operator T is one-to-one and therefore $f = 0$.

Thus we have a weak compact total subset $T^*(B_1)$ in $C(K)^*$ and then the assertion follows from the result of Rosenthal.

Corollary 1. *There exists a Grothendieck-compact K which is not an extremally disconnected compact with a strictly positive measure.*

Haydon [5] constructed a Grothendieck-compact K which is not extremally disconnected, such that the space $C(K)$ is isomorphic to a subspace of $l_\infty(\mathbb{N})$. Consequently, there is a linear bounded one-to-one operator $T: C(K) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$.

Really, let T_1 be an isomorphism from $C(K)$ into $l_\infty(\mathbb{N})$. The map $T_2: l_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$, defined by the equality

$$T_2(x) = \{x_n/n\}_{n=1}^\infty, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty(\mathbb{N}),$$

is obviously bounded linear one-to-one operator. Then our operator is $T = T_1 \circ T_2$.

Corollary 2. *If K is a Grothendieck-compact with a strictly positive measure, then the space $C(K)$ admits an equivalent strictly convex norm.*

Theorem 2. *Let K be a Rosenthal-compact. Then K admits a strictly positive measure if and only if K is separable.*

Proof. Let K be a separable compact, in particular, a separable Rosenthal-compact, and let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a dense subset in K , then we define a strictly positive measure μ on K by

$$\mu(U) = \sum_{x_n \in U} \frac{1}{2^n}$$

for all open sets U .

If now a separable Rosenthal-compact space K has a strictly positive measure μ , then the support of μ is equal to K . Therefore, the assertion follows from a result of Godefroy.

Corollary 3. *If K is a separable Rosenthal-compact, then the space $C(K)$ admits an equivalent strictly convex norm.*

4. QUESTION

A norm $\|\cdot\|$ of a Banach space X is *locally uniformly convex* if for every sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ and every $x \in X$, such that $\|x_n\| = \|x\| = 1$, if $\lim \|(x + x_n)/2\| = 1$ then $\lim \|x_n - x\| = 0$.

If the norm is locally uniformly convex then this norm is strictly convex.

Question. Let K be a separable Rosenthal-compact. Does the space $C(K)$ admit an equivalent locally uniformly convex norm?

REFERENCES

1. Argyros, S., S. Mercourakis, S. Negreponis. Functional-analytic properties of Corson-compact spaces. — *Studia Math.*, **89**, 1988, 197–229.
2. Comfort, W., S. Negreponis. Chain Conditions in Topology. — *Cambridge Tracts in Math.*, **79**, Cambridge Univ. Press, 1982.
3. Diestel, J. Geometry of Banach spaces. — Selected topics, *Lect. Notes in Math.*, **485**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
4. Godefroy, G. Compacts de Rosenthal. — *Pac. J. Math.*, **91**(2), 1980, 293–306.
5. Haydon, R. A non-reflexive Grothendieck space which does not contain l_{∞} . — *Isr. J. Math.*, **40**, 1981, 65–73.
6. Rosenthal, H. On injective Banach spaces and the spaces $L_{\infty}(\mu)$ for finite measures μ . — *Acta Math.*, **124**, 1970, 205–248.
7. Rosenthal, H. A characterization of Banach spaces containing l_1 . — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **71**, 1974, 2411–2413.

Received 30.03.1992

A CHARACTERIZATION OF THE COMPLEX SPACE FORMS*

GROZIO STANILOV, VESELIN VIDEV

Грозю Станилов, Веселин Видев. ХАРАКТЕРИСТИКА КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ

В почти эрмитовой геометрии вместе с классическим оператором Якоби мы вводим в рассмотрении также линейный симметрический оператор $\lambda_{X,JX}$, где X касательный вектор в точке $p \in M$. Доказываем следующая теорема: Келеровое многообразие размерности $2n \geq 4$ есть комплексная пространственная форма тогда и только тогда, когда для любого X в любой точки $p \in M$ оператор $\lambda_{X,JX}$ имеет собственные векторы в плоскости $X \wedge JX$.

Grozio Stanilov, Veselin Videv. A CHARACTERIZATION OF THE COMPLEX SPACE FORMS

In the almost Hermitian geometry together with the classical Jacobi operator λ_X we define also the linear symmetric operator $\lambda_{X,JX}$, where X is a tangent vector at a point $p \in M$. Then we prove the following theorem: A Kaehlerian manifold of dimension $2n \geq 4$ is a complex space form iff for every X at any point p the operator $\lambda_{X,JX}$ has eigen vectors in the plane $X \wedge JX$.

Let (M, g, J) be an almost Hermitian manifold with curvature tensor R . If X is a tangent (unit) vector at a point p of M , the well-known Jacobi operator λ_X is defined as linear mapping $\lambda_X : M_p \rightarrow M_p$ by the equality

$$\lambda_X(u) = R(u, X, X), \quad u \in M_p.$$

* Partially supported by the Ministry of Education and Science of Bulgaria under Contract MM — 18, 1991.

In the same way we define the linear operator

$$\lambda_{X,JX}(u) = \frac{1}{2}(R(u, X, JX) + R(u, JX, X)),$$

which is also a symmetric operator.

Now we state the following problem: to describe the manifolds for which at every point $p \in M$ and for any vector $X \in M_p$ the linear operator $\lambda_{X,JX}$ has eigen vectors u belonging to the holomorphic plane $E^2(p; X \wedge JX)$. If we take

$$u = \alpha X + \beta JX, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

from the condition

$$\lambda_{X,JX}(u) = cu,$$

i. e.

$$\frac{1}{2}(R(u, X, JX) + R(u, JX, X)) = cu,$$

by multiplication with X and JX we get the result: the vectors

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + JX), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - JX)$$

are eigen vectors with corresponding eigen values

$$c_1 = -\frac{1}{2}H(X), \quad c_2 = \frac{1}{2}H(X).$$

Here $H(X)$ is the holomorphic sectional curvature of X .

Now we express that the vectors $\frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}$ are eigen vectors of the operator

$\lambda_{X,JX}$:

$$\frac{1}{2} \left(R \left(\frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}, X, JX \right) + R \left(\frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}, JX, X \right) \right) = \mp \frac{H(X)}{2} \frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}.$$

Using the properties of R we see that these equalities are equivalent to the relations

$$(1) \quad R(X, JX, JX) = H(X)X, \quad R(JX, X, X) = H(X)JX.$$

Thus we can formulate the following

Theorem 1. *If the operator $\lambda_{X,JX}$ has eigen vectors in the plane $E^2(p; X \wedge JX)$ then the Jacobi operator λ_X has as eigen vector JX and the Jacobi operator λ_{JX} has as eigen vector X .*

Now we try to prove the converse of this assertion. Namely, using (1) we get immediately:

$$\begin{aligned} \lambda_{X,JX} \left(\frac{X \pm JX}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\pm R(JX, X, JX) + R(X, JX, X)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\mp H(X)X - H(X)JX) = \mp \frac{1}{2} H(X) \frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Thus we have the following

Theorem 2. *If the operator λ_X has as eigen vector JX and the operator λ_{JX} has as eigen vector X then the vectors $\frac{X \pm JX}{\sqrt{2}}$ are eigen vectors of the operator $\lambda_{X, JX}$.*

Example. Let us consider the complex space form that is the Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature μ . In this case the curvature tensor is of the form

$$R(X, Y, Z, U) = \frac{\mu}{4}(g(Y, Z)g(X, U) - g(X, Z)g(Y, U) + g(JY, Z)g(JX, U) - g(JX, Z)g(JY, U) - 2g(JX, Y)g(JZ, U)).$$

Then the Jacobi operator is represented by

$$\lambda_X(u) = \frac{\mu}{4}(u - g(u, X)X + 3g(u, JX)JX).$$

We can see immediately λ_X has as eigen vector JX and λ_{JX} has as eigen vector X .

We shall prove the converse of this assertion. Namely, the main result of this paper is the following characterization of the complex space forms:

Theorem 3. *Let (M, g, J) be a Kaehlerian manifold of dimension $2n \geq 4$. Then it is a complex space form iff for any unit vector $X \in M_p$ at every point $p \in M$ the operator $\lambda_{X, JX}$ has eigen vectors in the plane $E^2(p; X \wedge JX)$.*

Proof. Let X, Y, JX, JY is an orthonormal quadruple. Using (1) we get the relation $R(X, JX, JX, Y) = 0$. We apply this relation for the vectors $X + Y, X - Y, JX + JY, JX - JY$ and after some calculations we have

$$R(X, JX + JY, JX + JY, X) = R(Y, JX + JY, JX + JY, Y).$$

Since the manifold is a Kaehlerian one, the last equality is equivalent to the relation $H(X) = H(Y)$.

We take now the vector $u = \cos \alpha X + \sin \alpha Y$ in the plane $E^2(p; X \wedge Y)$. Following (1) we can write the relation $R(Ju, u, u) = H(u)Ju$ and after some long calculations we get the equality

$$\begin{aligned} & \cos^3 \alpha R(JX, X, X) + \cos^2 \alpha \sin \alpha R(JX, X, Y) + \cos^2 \alpha \sin \alpha R(JX, Y, X) \\ & + \cos \alpha \sin^2 \alpha R(JX, Y, Y) + \cos^2 \alpha \sin \alpha R(JY, X, X) + \sin^3 \alpha R(JY, Y, Y) \\ & + \cos \alpha \sin^2 \alpha R(JY, X, Y) + \cos \alpha \sin^2 \alpha R(JY, Y, X) = H(u)(\cos \alpha JX + \sin \alpha JY). \end{aligned}$$

If we multiply by JX we get the relation

$$\cos^2 \alpha H(X) + 2 \sin^2 \alpha R(JX, Y, Y, JX) + \sin^2 \alpha R(JY, Y, X, JX) = H(u)$$

and after multiplying by JY we have

$$\cos^2 \alpha R(JX, X, Y, JY) + 2 \cos^2 \alpha R(JX, Y, Y, JX) + \sin^2 \alpha H(Y) = H(u).$$

From the last two equalities we can get

$$\cos^4 \alpha H(X) - \sin^4 \alpha H(Y) = H(u)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

and since $H(X) = H(Y)$ then $H(u) = H(X) = H(Y)$.

To finish the proof we must show that the relation

$$H(v) = H(X) = H(Y)$$

holds good for any vector

$$v = aX + bY + cJX + dJY \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1)$$

in the 4-dimensional space spanned by vectors X, Y, JX, JY .

If we put

$$aX + cJX = \cos \alpha X', \quad \cos \alpha = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$bY + dJY = \sin \alpha Y', \quad \sin \alpha = \sqrt{b^2 + d^2},$$

we reach to $v = \cos \alpha X' + \sin \alpha Y'$ and since $X \wedge JX = X' \wedge JX', Y \wedge JY = Y' \wedge JY'$, then

$$H(v) = H(X') = H(Y') = H(X) = H(Y).$$

If the dimension $2n > 4$, we take vector Z orthogonal to X, Y, JX, JY and apply the same considerations for the orthonormal quadruple X, Z, JX, JZ .

Evidently, the main result can be expressed also in the following way: A Kaehlerian manifold of dimension $2n \geq 4$ is a complex space form iff for every $X \in M_p$ at every point $p \in M$ the Jacobi operator λ_X has as eigen vector JX .

REFERENCES

1. Stanilov, G. On the geometry of the Jacobi operators on 4-dimensional Riemannian manifolds. — *Tensor, N. S.*, 51, 1992, 9–15.
2. Quo-Shin Chi. A curvature characterization of certain locally Rank — one symmetric spaces. — *J. Diff. Geometry*, 28, 1988, 187–202.

Received 15.02.1992

SURJECTIVE CHARACTERIZATIONS OF METRIZABLE LC^∞ -SPACES

VESKO VALOV

Веско Вывлов. СЮРЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТРИЗУЕМЫХ LC^∞ -ПРОСТРАНСТВ

В работе доказывается следующая теорема (теорема 1. 1):

Метризуемое пространство Y является LC^∞ (соответственно $LC^\infty \& C^\infty$) тогда и только тогда, когда для каждого паракомпактного p -пространства X и каждого его замкнутого локально-конечномерно вложенного подмножества A , любое непрерывное отображение $f: A \rightarrow Y$ имеет непрерывное продолжение на окрестность множества A (соответственно на X).

При помощи этой теоремы получается положительный ответ следующего вопроса А. Чигогидзе: Верно ли что метризуемые $LC^\infty \& C^\infty$ -пространства характеризуются как непрерывные образы абсолютных ретрактов при индуктивно ∞ -мягких отображениях?

Vesko Valov. SURJECTIVE CHARACTERIZATIONS OF METRIZABLE LC^∞ -SPACES

In this note the following theorem is proved (theorem 1. 1):

A metrizable space Y is LC^∞ (resp. $LC^\infty \& C^\infty$) if and only if for any paracompact p -space X and any closed locally finite-dimensionally embedded subset A of X , any map $f: A \rightarrow Y$ can be continuously extended to a neighborhood of A in X (resp. to X).

Using this theorem we give a positive answer of the following question of A. Chigogidze: Is it true that a metrizable space Y is $LC^\infty \& C^\infty$ if and only if Y is an image of an absolute extensor for metrizable spaces under a ∞ -soft map?

INTRODUCTION

In this note we prove the following theorem:

Theorem 1.1. *A metrizable space Y is LC^∞ (resp. $LC^\infty \& C^\infty$) if and only*

if for any paracompact p -space X , any closed locally finite-dimensionally embedded subset A of X , any map $f: A \rightarrow Y$ can be continuously extended to a neighborhood of A in X (resp. to X).

Let us note that all maps are assumed to be continuous and all spaces—normal. A space Y is LC^∞ (resp. $LC^\infty \& C^\infty$) if Y is LC^n (resp. $LC^n \& C^n$) for every natural n . A subset H of a space X is said to be locally finite-dimensionally embedded in X [6] if every point $x \in X$ has a neighborhood $O(x)$ in X such that $rd_X(H \cap O(x)) < \infty$, where

$$rd_X(H \cap O(x)) = \sup\{\dim(P) : P \text{ is closed in } X \text{ and } P \subset H \cap O(x)\}.$$

The first motivation for the above result was the obvious parallelism between the following theorems:

Theorem 2. ([2]) *A metrizable space Y is LC^n (resp. $LC^n \& C^n$) if and only if for any metrizable space X and any closed subspace A of X with $\dim(X-A) \leq n+1$, any map $f: A \rightarrow Y$ can be continuously extended to a neighborhood of A in X (resp. to the whole of X).*

Theorem 3. ([1]) *A metrizable space Y is LC^n (resp. $LC^n \& C^n$) if and only if for every metrizable space X and any closed subspace A of X with $\dim(A) \leq n$, any map $f: A \rightarrow Y$ can be continuously extended to a neighborhood of A in X (resp. to the whole of X).*

In the class of compact metrizable spaces the above theorem was proved by Dranishnikov [3].

The second motivation was the following result:

Theorem 4. ([7]) *A metrizable space Y is LC^∞ (resp. $LC^\infty \& C^\infty$) if and only if for every paracompact p -space X and any closed subset A of X , having a neighborhood U in X such that $U - A$ is locally finite-dimensionally embedded in U , any map $f: A \rightarrow Y$ can be continuously extended to a neighborhood of A in X (resp. to the whole of X).*

As a consequence of Theorem 1.1 we get surjective characterizations of metrizable $LC^\infty \& C^\infty$ -spaces. It is proved in [1] that the metrizable space X is $LC^n \& C^n$ (resp. LC^n) if and only if X is an inductively n -soft image of an AE (resp. of an ANE). In this connection A. Chigogidze asked whether a similar characterization is true for metrizable $LC^\infty \& C^\infty$ -spaces. The following theorem is a positive answer of this question.

Theorem 2.1. *For a metrizable space X the following conditions are equivalent:*

- (i) X is $LC^\infty \& C^\infty$ (resp. LC^∞);
- (ii) X is an inductively ∞ -soft image of an AE (resp. ANE);
- (iii) X is an ∞ -invertible image of an AE (resp. ANE).

By AE (resp. ANE) we denote the class of metrizable spaces which are absolute (resp. absolute neighborhood) extensors for metrizable spaces. Let $f: X \rightarrow Y$ be a map between metrizable spaces and $n \geq 0$. Then:

f is n -soft [10] if for any at most n -dimensional paracompact space Z , any closed subspace A of Z and any two maps $g: Z \rightarrow Y$, $h: A \rightarrow X$ with $f \cdot h = g|_A$, there exists a map $k: Z \rightarrow X$ such that $f \cdot k = g$ and $k|_A = h$;

f is inductively ∞ -soft if it is inductively n -soft for every natural n , i. e. for every n there is a closed subspace $A(n)$ of X such that the restriction $f|_{A(n)}: A(n) \rightarrow Y$ is n -soft;

f is n -invertible [4] if for any at most n -dimensional metrizable space Z and any map $g: Z \rightarrow Y$ there exists a map $h: Z \rightarrow X$ such that $g = f \circ h$;

f is ∞ -invertible if it is n -invertible for every natural n .

Obviously, any n -soft map is n -invertible, $n \in N$. So, every inductively ∞ -soft map is ∞ -invertible.

1. PROOF OF THEOREM 1.1

Let Y be a metrizable LC^∞ & C^∞ -space. Suppose X is a paracompact p -space, A is a closed locally finite-dimensionally embedded subset of X and f is a map from A into Y . For every $x \in X$ take an open neighborhood $O(x)$ of x in X such that $rd_X(O(x) \cap A) < \infty$ and consider the open cover $\alpha = \{O(x) : x \in X\}$ of X . Let γ be an open locally finite closure-refinement of α . Then for every $U \in \gamma$ we have $\dim(cl_X(U) \cap A) < \infty$. Put $\gamma(k) = \{U \in \gamma : \dim(cl_X(U) \cap A) \leq k\}$ and $F(k) = \cup\{cl_X(U) : U \in \gamma(k)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Obviously $\{F(k) : k \in N\}$ is an increasing sequence of closed subsets of X and $X = \cup\{F(k) : k \in N\}$. Since for every k the family $\gamma(k)$ is locally finite, $\dim(A(k)) \leq k$, where $A(k) = F(k) \cap A$. By the well-known factorization theorem of Pasynkov [8] there are a metrizable space Z , closed subsets $Z(k)$ of Z , $k \in N$, and maps $g: A \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow Y$, such that $h \circ g = f$, $g(A(k)) \subset Z(k)$ and $\dim(Z(k)) \leq k$ for every $k \in N$. Without a loss of generality we can suppose that $Z(k)$ is contained in $Z(k+1)$ for each k .

Now for every $k \in N$ we construct inductively an AE -space $P(k)$ containing $Z(k)$ as a closed subset and maps $g(k): F(k) \rightarrow P(k)$, $h(k): P(k) \rightarrow Y$ such that the following conditions are fulfilled:

- (1) $P(k) \cup Z(k+1)$ is a closed subspace of $P(k+1)$;
- (2) $P(1)$ is attached to Z in the points of $Z(1)$ and $P(k+1)$ is attached to $Z \cup P(k)$ in the points of $P(k) \cup Z(k+1)$;
- (3) $g(k)|_{A(k)} = g|_{A(k)}$ and $g(k+1)|_{F(k)} = g(k)$;
- (4) $h(k)|_{Z(k)} = h|_{Z(k)}$ and $h(k+1)|_{P(k)} = h(k)$;
- (5) $\dim(P(k)) \leq k+1$.

Suppose we have already constructed $P(k)$, $g(k)$ and $h(k)$ for every $k \leq n$. Consider the union $P(n) \cup Z(n+1)$. Obviously, it is metrizable and $\dim(P(n) \cup Z(n+1)) \leq n+1$. By a result of Kodama [5] there is an AE -space $P(n+1)$ with $\dim(P(n+1)) \leq n+2$ containing $P(n) \cup Z(n+1)$ as a closed subset. We can assume that $P(n+1)$ is attached to the space $Z \cup P(n)$ in the points of $P(n) \cup Z(n+1)$. The space $P(n+1)$, being an absolute extensor for metrizable spaces, is an absolute extensor for paracompact p -spaces [6]. Consequently, there is a map $g(n+1)$ from $F(n+1)$ to $P(n+1)$ such that $g(n+1)|_{A(n+1)} = g|_{A(n+1)}$ and $g(n+1)|_{F(n)} = g(n)$. Let $h^*(n): P(n) \cup Z(n+1) \rightarrow Y$ be defined by $h^*(n)(z) = h(n)(z)$ if $z \in P(n)$, and $h^*(n)(z) = h(z)$ if $z \in Z(n+1)$. It follows from (1) — (4) that $h^*(n)$ is well defined and continuous. Now, by Theorem 2 and $Y \in LC^\infty$ & C^∞ ,

there is a continuous extension $h(n+1): P(n+1) \rightarrow Y$ of $h^*(n)$. The verification of the conditions (1) — (5) is left to the reader.

Let $f(k) = h(k).g(k)$ for every $k \in N$. It follows from our construction that $f(k): F(k) \rightarrow Y$ is a continuous map, $f(k)|A(k) = f|A(k)$ and $f(k+1)|F(k) = f(k)$. Therefore, we can define a map $\bar{f}: X \rightarrow Y$ by $\bar{f}(x) = f(k)(x)$ provided $x \in F(k)$. Obviously, \bar{f} is an extension of f . It remains only to prove the continuity of \bar{f} . This can be done by the following arguments: For every $U \in \gamma$ its closure $cl_X(U)$ is contained in some $F(k)$. So, we have that $\bar{f}|U$ is continuous for each $U \in \gamma$. Thus, \bar{f} is continuous.

Suppose now Y is LC^∞ , X is a paracompact p -space, A is a closed locally finite-dimensionally embedded subset of X and f is a map from A into Y . Then the cone $con(Y)$ of Y is a metrizable $LC^\infty \& C^\infty$ -space. Next, by standard arguments (using the previous case), we can get an extension $\bar{f}: U \rightarrow Y$ of f , where U is a neighborhood of A in X .

The sufficiency in Theorem 1.1 follows from Theorem 2 and the obvious fact that every subset of a finite dimensional space X is locally finite-dimensionally embedded in X .

Remark 1.2. If in Theorem 1.1 Y is completely metrizable then X can be supposed to be collectionwise normal. In this case the space Z (see the proof of Theorem 1.1) can be assumed to be complete. Then, by a result of Tsuda [11], the spaces $P(k)$ can be chosen to be also complete. Finally, the existence of the maps $g(k)$, $k \in N$, follows from the fact that every complete AE is an absolute extensor for collectionwise normal spaces [9].

2. PROOF OF THEOREM 2.1

We shall prove only the global variant. The local one follows from the same arguments.

(i) \rightarrow (ii). Let τ be the weight of Y . Then for every $n \in N$ there exist an n -dimensional metrizable space $A(n, \tau)$ of weight τ and an n -soft map $f(n)$ from $A(n, \tau)$ onto Y [1, Corollary 2.3]. Consider the discrete sum A of the spaces $A(n, \tau)$, $n \in N$, and the map $f: A \rightarrow Y$, defined by $f(x) = f(n)(x)$ if $x \in A(n, \tau)$. Embed A into an AE -space X as a closed subset. Since A is locally finite-dimensionally embedded in X , by Theorem 1.1 there is an extension $\bar{f}: X \rightarrow Y$ of f . Clearly, \bar{f} is inductively ∞ -soft.

(ii) \rightarrow (iii). This implication is trivial, because any inductively ∞ -soft map is ∞ -invertible.

(iii) \rightarrow (i). Let X be an AE -space and f be an ∞ -invertible map from X onto Y . Suppose B is an n -dimensional closed subset of a metrizable space Z and $g: B \rightarrow Y$ is a map, where $n \in N$. Since f is n -invertible, there exists a map $h: B \rightarrow X$ such that $f.h = g$. Take any extension $k: Z \rightarrow X$ of h (the existence of k follows from $X \in AE$). Then the map $f.k$ is an extension of g . Hence, by Theorem 3, Y is $LC^n \& C^n$. Thus, we prove that $Y \in LC^\infty \& C^\infty$.

Let us consider the proof of Theorem 1.1, implication (i) \rightarrow (ii). If Y is a complete metrizable space of weight τ , then by [1, Corollary 2.3] the spaces $A(n, \tau)$

are also complete. Consequently, A can be embedded as a closed subset in the Hilbert space $l_2(\tau)$. So, we can suppose that X is the space $l_2(\tau)$. Thus, the following theorem is true.

Theorem 2.2. *Let Y be a completely metrizable space of weight $\tau \geq \omega$. Then the following conditions are equivalent:*

- (i) X is LC^∞ & C^∞ (resp. LC^∞);
- (ii) X is an inductively ∞ -soft image of $l_2(\tau)$ (resp. of an open subspace of $l_2(\tau)$);
- (iii) X is an ∞ -invertible image of $l_2(\tau)$ (resp. of an open subset of $l_2(\tau)$).

REFERENCES

1. Chigogidze, A., Valov, V. Universal maps and surjective characterizations of completely metrizable LC^n -spaces. — Proc. Amer. Math. Soc., **109**(4), 1990, 1125–1133.
2. Dugundji, J. Absolute neighborhood retracts and local connectness in arbitrary metric space. — Comp. Math., **13**, 1958, 229–246.
3. Dranishnikov, A. Absolute extensors in dimension n and n -soft maps increasing dimension. — Uspekhi Mat. Nauk, **39**, 1984, 55–95 (in Russian).
4. Hoffman, B. A surjective characterization of Dugundji spaces. — Proc. Amer. Math. Soc., **76**, 1979, 151–156.
5. Kodama, Y. On embeddings of spaces into ANR and shape. — J. Math. Soc. Japan, **27**, 1975, 533–544.
6. Lisica, J. Extension of continuous mappings and a factorization theorem. — Sibirski Mat. Z., **14**, 1973, 128–139 (in Russian).
7. Lisica, J. On spaces connected and locally connected in all dimensions. — Fund. Math., **80**, 1973, 35–45 (in Russian).
8. Pasinkov, B. Factorization of mappings onto metric spaces. — Dokl. Acad. Nauk USSR, **182**(2), 1968, 268–271 (in Russian).
9. Przymsinski, T. Collectionwise normality and absolute retracts. — Fund. Math., **98**, 1978, 61–73.
10. Shchepin, E. Functors and uncountable powers of compacta. — Uspekhi Mat. Nauk, **36**, 1981, 3–62 (in Russian).
11. Tsuda, K. A note on closed embeddings of finite dimensional metric spaces. — Bull. Polish Acad. Sci. Math., **33**, 1985, 541–546.

Received 11.05.1992

ON THE GEOMETRY OF SUBGROUPS OF SUZUKI GROUP IN FINITE NON-MIQUELIAN INVERSIVE PLANES*

CHAVDAR LOZANOV, GERGANA ENEVA

Чавдар Лозанов, Гергана Енева. О ГЕОМЕТРИИ ПОДГРУПП ГРУППЫ СУЗУКИ В КОНЕЧНЫХ НЕМИКЕЛЕВЫХ ИНВЕРСНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Простую группу Сузуки $Sz(2^{2r+1})$ можно рассматривать как подгруппу группы коллинеаций трехмерного проективного пространства $PG(3, 2^{2r+1})$ над $GF(2^{2r+1})$, которая фиксирует овоид Титса $t(\psi)$. Эта группа определяет конечную немикелевую овоидальную инверсную плоскость $\mathcal{J}(o)$ порядка q , которая состоит из точек и секущих плоскостей данного овоида, когда $q = 2^{2r+1}$. В этой работе детально рассматривается геометрия подгрупп $Sz(2^{2r+1})$ относительно немикелевой инверсной плоскости $S(q)$.

Chavdar Lozanov, Gergana Eneva. ON THE GEOMETRY OF SUBGROUPS OF SUZUKI GROUP IN FINITE NON-MIQUELIAN INVERSIVE PLANES

The simple Suzuki group $Sz(2^{2r+1})$ can be considered as a subgroup of the group of collineations of 3-dimensional projective space $PG(3, 2^{2r+1})$ over $GF(2^{2r+1})$, fixing the special Tits ovoid $t(\psi)$. This group determines a finite non-miquelian egglike Mobius plane $\mathcal{J}(o)$ of order q , consisting of points and plane sections of the above ovoid, when $q = 2^{2r+1}$. In this paper a detailed picture of the geometry of the subgroups of $Sz(2^{2r+1})$ is given with respect to the non-miquelian Mobius plane $S(q)$.

In 1958 Suzuki discovered a class of simple groups $Sz(2^{2r+1})$ with properties similar to that of the little projective group $PSL(3, 2^r)$ over Galois field $GF(2^r)$.

* This investigation is partially supported by the Contract No MM 24/91 of Ministry of Science and Education.

The group $PSL(3, 2^r)$ can be considered as a subgroup of the collineations of 3-dimensional projective space $PG(3, 2^r)$ over $GF(2^r)$, leaving invariant an ovoid which is non-ruled quadric. Later Tits showed that there exist an ovoid $t(\psi)$ such that the group $Sz(2^{2r+1})$ also can be considered as a subgroup of the collineations of 3-dimensional projective space $PG(3, 2^{2r+1})$ over $GF(2^{2r+1})$, leaving invariant the ovoid $t(\psi)$.

Each of these groups determine a class of finite egglike Mobius planes $\mathcal{J}(o)$, consisting of points and plane sections of the above ovoids. The two classes are: miquelian planes — $M(q)$, where o is non-ruled quadric in $PG(3, q)$ and non-miquelian — $S(q)$, where o is the Tits ovoid $t(\psi)$, and $q = 2^{2r+1}$.

A Mobius (inversive) plane can be considered also as an incidence structure $\mathcal{J} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, z)$, whose blocks are called circles, such that the following axiom is satisfied:

For every point $P \in \mathfrak{P}$ the internal structure \mathcal{J}_P is an affine plane.

The automorphism group of $S(q)$ — $\text{Aut}S(q)$, is the semidirect product $Sz(q) \cdot \text{Aut}GF(q)$. $\text{Aut}S(q)$ is doubly transitive on the points of $S(q)$ and transitive on circles of $S(q)$.

The structure of Suzuki group $\mathbb{G} = Sz(q)$ is investigated by Luneburg in [1], where some geometric characteristics of subgroups of $Sz(q)$ are given.

Suzuki group \mathbb{G} has order $o(\mathbb{G}) = (q^2 + 1)q^2(q - 1)$ and contains the following subgroups:

- 1) Sylow 2-subgroup \mathbb{S} of order q^2 ;
- 2) The normalizer $\mathbb{F} = \mathfrak{R}_G \mathbb{S}$ of \mathbb{S} , which is Frobenius group of order $q^2(q - 1)$;
- 3) Dihedral group \mathbb{D} of order $2(q - 1)$;
- 4) Two cyclic subgroups: \mathbb{Z}' of order $q + \sqrt{2q} + 1$ and \mathbb{Z}'' of order $q - \sqrt{2q} + 1$;
- 5) The normalizers: $N' = \mathfrak{R}_G \mathbb{Z}'$ of order $4(q + \sqrt{2q} + 1)$ and $N'' = \mathfrak{R}_G \mathbb{Z}''$ of order $4(q - \sqrt{2q} + 1)$;
- 6) The group $S(k)$, when $q = k^n$ and $k \geq 8$ [1].

In this paper we give more detailed picture of the geometry of the above subgroups.

We use for our investigation a representation of non-miquelian inversive plane $S(q)$, introduced in our paper [2]. The points of $S(q)$ are the points (x, y) of the corresponding affine plane $A(2, q)$ and the symbol (∞) . The circles of $S(q)$ are the special ovals $c : D \cdot \Psi(x, y) + Ax + By + C = 0$ in $A(2, q)$, where $\Psi(x, y) = x^{\sigma+2} + y^{\sigma} + xy$ and $D, A, B, C \in GF(q)$ — Galois field of q elements, $q = 2^e$, e odd and $e \geq 3$, and σ is the unique automorphism of $GF(q)$ satisfying $x^{\sigma^2} = x^2$ for all $x \in GF(q)$. The point (∞) is incident only with circles with $D = 0$.

The elements of the automorphism group of $S(q)$ — $\text{Aut}S(q)$ are explicitly given by:

$$(\infty)\varphi_{abpsr}^{\alpha} = (a^{\alpha}, b^{\beta}); \quad (p, s)\varphi_{abpsr}^{\alpha} = (\infty);$$

$$(\infty)\tau_{klm}^{\beta} = (\infty),$$

where $a, b, p, s, r, k, l, m \in GF(q)$, $r \neq 0, k \neq 0$, and α, β are inner automorphisms of $GF(q)$.

The subgroup $Sz(q)$ of $\text{Aut}S(q)$ is of type:

$$\{\varphi_{abpqr}^\alpha, \tau_{klm}^\beta : \alpha = \beta = 1\}.$$

We shall use the following notations:

Π^L — a set of pencils (parabolic pencils) with carrier L ;

π^L — a pencil (parabolic pencils) with carrier L ;

ε^{AB} — the bundle (hyperbolic pencil) with carriers A, B ;

χ^{AB} — the flock (elliptic pencil) with carriers A, B ;

Γ^P — the subgroup of $\mathbb{G} = Sz(q)$ that fixes the point P ;

Γ^{PQ} — the subgroup of $\mathbb{G} = Sz(q)$ that fixes the set of two points P and Q .

I. SUBGROUPS WHICH FIX A POINT OF $S(q)$

1) As it is shown in [2] the Frobenius group \mathbb{F} is the stabilizer of a fixed point P , $\mathbb{F}^P = \text{Stab}P$. A more detailed information on the geometry of \mathbb{F} gives:

A. $\mathbb{F} = \text{Stab}P$ is the stabilizer of the set Π^P . There exists a unique pencil $\pi_o^P \in \Pi^P$, such that the \mathbb{F} is transitive on the pencils of the set $\{\Pi^P \setminus \pi_o^P\}$ and doubly transitive on the circles of π_o^P [3].

We call π_o^P the special pencil in the point P . Note that these special pencils correspond to the special pencils of type VI.1 in Hering's classification of Möbius planes.

2) The Sylow 2-subgroup $\mathbb{S} \subset \mathbb{F}$ is characterized geometrically by

B. \mathbb{S}^P fixes given point P and Π^P , and is transitive on the pencils of the set $\{\Pi^P \setminus \pi_o^P\}$. It is transitive, but not doubly transitive, on the circles of π_o^P [3].

The 2-Sylow subgroup \mathbb{S}^P possesses an Abelian subgroup Δ^P of order q and exponent 2. It fixes the point P and considered as a permutation group on the points of $\{S(q) \setminus P\}$ has q orbits of length q . The points of each orbit are incident with a circle of the special pencil π_o^P in the point P .

The stabilizer \mathbb{C} of a fixed circle c is a subgroup of order $q(q-1)$. Another characterization of \mathbb{C} is given by

C. There exists a unique point $P \in c$ fixed by \mathbb{C} , and \mathbb{C}^P is doubly transitive on the point set $\{c \setminus P\}$. \mathbb{C}^P is a subgroup of \mathbb{F}^P . We call P the special point of the circle c .

In other words, P is the special point of the circle c , if and only if $\text{Stab}c \subset \text{Stab}P$.

The subgroup \mathbb{C}^P also contains an Abelian subgroup Δ^P of order q and exponent 2. Consider the set $\mathfrak{M} = \{\mathbb{C}_i^P : \mathbb{C}_i^P \cap \mathbb{C}_j^P = \Delta^P\}$. The set of circles c_i corresponding to the groups \mathbb{C}_i^P form the special pencil π_o^P in the point P .

Let A, B, C, D be four points incident with a circle c . If c_0 is a circle incident with the points B and C , the pencils π^B and π^C are determined. There exists a

unique circle $c_1 \in \pi^B$, $c_1 \perp A$, and unique circle $c_2 \in \pi^C$, $c_2 \perp D$. Then the circle c_1 determines a pencil π^A with carrier A , and the circle c_2 determines a pencil π^D with carrier D . Let c' be the circle of π^A , incident with D , and c'' be the circle of π^D , incident with A .

There are two possibilities for c' and c'' :

- i. c' coincides with c'' ;
- ii. c' and c'' are distinct.

The first case corresponds to the theorem of Miquel for 4 circles tangent two by two. In miquelian Mobius planes — $M(q)$, only this case is realized.

The second possibility corresponds to the degenerated case of the theorem of Miquel for 5 points and there is no nontrivial realization of it in miquelian Mobius plane. But in non-miquelian Mobius planes $S(q)$ it can be realized particularly.

So the following definitions are natural:

A quadruple of concircular points (A, B, C, D) in $S(q)$ is called *miquelian* if for any circle c_0 incident with the points B and C the corresponding circles c' and c'' coincide.

A quadruple of concircular points (A, B, C, D) in $S(q)$ is called *non-miquelian* if for any circle c_0 incident with the points B and C the corresponding circles c' and c'' are distinct.

We proved in [4] that

D. A quadruple of concircular points (A, B, C, D) in $S(q)$ is miquelian if and only if there exists $\varphi \in \Delta$ such that

$$\varphi\{A, B, C, D\} = \{A, B, C, D\}$$

or, equivalently, if there exists an involution in which they are corresponding points.

Note that in miquelian Mobius planes $M(q)$ there is always such involution — the inversion which fixes the circle incident with A, B, C, D .

E. A quadruple of concircular points (A, B, C, D) in $S(q)$ is non-miquelian if and only if for any $\psi \in \mathcal{C}$

$$\psi\{A, B, C, D\} \neq \{A, B, C, D\}$$

or, equivalently, if there is no involution in which they are corresponding points. Moreover, if one of the points A, B, C, D is the special point of the circle c then the quadruple (A, B, C, D) is always non-miquelian.

II. SUBGROUPS WITHOUT FIXED POINTS

3) The dihedral group \mathbb{D} fixes a set of two points P and Q , i. e. it is stabilizer of the bundle ε^{PQ} with carriers P, Q . There exist exactly two circles $c_0, c_0^* \in \varepsilon^{PQ}$ such that \mathbb{D}^{PQ} is transitive on the set of circles $\{\varepsilon \setminus c_0, c_0^*\}$ and on the set of points $\{c_0 \cup c_0^* \setminus P \cup Q\}$. Also \mathbb{D} is stabilizer of the flock χ^{PQ} with carriers P, Q and is transitive on it's circles [3].

We call c_0 and c_0^* *special circles of the bundle* ε .

The dihedral group \mathbb{D}^{PQ} , possesses a cyclic subgroup \mathbb{T}^P of order $q-1$. It fixes the point P and considered as a permutation group on the points of $\{S(q) \setminus P \cup Q\}$ has $q+1$ orbits of length $q-1$. The points of exactly two orbits are incident with a circle and these are the special circles of the bundle ε^{PQ} . The points of any other orbit are not incident with a circle.

Note that in [2], [3] and [4] we consider the problem of realization of some configurational propositions in $S(q)$, while here we interpret some of the results from the point of view of the geometry of subgroups of $Sz(q)$.

4) At least we shall list some particular but interesting results about the geometry of the cyclic group \mathbb{Z}' in the unique finite inversive non-miquelian plane $S(8)$.

Since the order of $Sz(8)$ is $o(Sz(8)) = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ it follows that the groups \mathbb{Z}' and \mathbb{Z}'' are Sylow p -subgroups of $Sz(8)$ with $p = 13$ and $p = 5$ respectively.

An immediate consequence of the Theorems of Sylow is that the number of Sylow p -subgroups of $Sz(8)$ is equal to the index of the normalizer of any p -subgroup in $Sz(8)$. Also if A and B are Sylow p -subgroups of the group \mathbb{G} considered as a permutation group on the points of $S(8)$, there exists element $\psi \in \mathbb{G}$, such that if $\{O^A\}$ and $\{O^B\}$ are the orbits of A and B respectively, then $\{O^A\}\psi = \{O^B\}$.

So we can consider any fixed cyclic subgroup \mathbb{Z}^{13} of $Sz(8)$.

Since $o(\mathbb{F}) = 2^6 \cdot 7$, $\mathbb{F}^\infty = \{\tau_{klm}^1\}$ and $o(\mathbb{Z}') = 13$, then

$$\mathbb{Z}' = \{\varphi_{abpsr}^1\}.$$

A sufficient condition \mathbb{Z}' to be generated by φ_{abpsr} is $a = p$.

In the case of $S(8) - q = 2^3$ from $(\varphi_{abpsr}^1)^{13} = \text{id}$ follows

$$(1) \quad 1 + [r(b+s)]^2 + [r(b+s)]^3 = 0.$$

Let z be a generator of Galois field $GF(8)$. Then a solution of (1) is $b = z^3$, $s = 0$, $r = 1$ and since $a = p$ is not fixed, we put $a = p = 0$. We denote by \mathbb{Z}_0^{13} this subgroup, i. e. $\mathbb{Z}_0^{13} = \langle \varphi_{0z^3001}^1 \rangle$.

$\mathbb{F} \cdot \mathbb{Z}_0^{13}$ considered as a permutation group on the points of $S(8)$ has five distinct orbits \mathcal{D} . On the other hand, \mathbb{Z}_0^{13} considered as a permutation group on the circles of $S(8)$ has 40 distinct orbits ω , such that each point orbit \mathcal{D} generates exactly ten circle orbits and every two point orbits have one circle orbit in common [5].

Let \mathcal{D}' and \mathcal{D}'' be two point orbits of \mathbb{Z}_0^{13} and $(\mathcal{D}')\psi = \mathcal{D}''$, where $\psi \in Sz(8)$. Then $\psi \in N_G(\mathbb{Z}_0^{13})$. In fact for any such ψ we have $(\psi)^{-1}\mathbb{Z}_0^{13}\psi = \mathbb{Z}_0^{13}$. From here it is easy to prove

G. There are two point orbits \mathcal{D}' and \mathcal{D}'' which are not isomorphic with respect to the group $Sz(8)$ and any other point orbit is isomorphic either to \mathcal{D}' or to \mathcal{D}'' .

Every point orbit \mathcal{D} of the group \mathbb{Z}_0^{13} generates six circle orbits ω , such that if $c \in \omega$ then $|c \cap \mathcal{D}| = 3$, and four circle orbits π , such that if $c \in \pi$ then $|c \cup \mathcal{D}| = 4$.

H. Let ω be a circle orbit generated by a point orbit \mathfrak{D} with $|c \cap \mathfrak{D}| = 3$ if $c \in \omega$. Then there exists automorphism $\varphi \in \mathbb{Z}_0^{13}$ such that $\omega = \{c_i = (c_0)\varphi^i \mid i = 1 \div 13\}$ and (c_i, c_{i+1}) determine a bundle, and (c_i, c_{i+2}) determine a pencil.

I. Let π be a circle orbit \mathfrak{D} with $|c \cap \mathfrak{D}| = 4$ if $c \in \pi$. If consider π as an incidence structure with "points" — the points of \mathfrak{D} , "blocks" — the circles of π , and incidence the same as in $S(8)$, then π is a projective 2-(13, 3, 1) design. So π is a projective plane of order 3. Since all finite projective planes of order $n \leq 8$ are desarguesian, π is desarguesian. Then π is a desarguesian projective plane of order 3 [5].

The geometric characterization of the fact that \mathfrak{D}' and \mathfrak{D}'' are nonisomorphic is given by:

J. Every quadruple of concircular points of the orbit \mathfrak{D}' is miquelian. Every two quadruples of concircular points of the orbit \mathfrak{D}' are isomorphic.

K. Every quadruple concircular points of any orbit \mathfrak{D}'' is non-miquelian.

Thus we obtain the following geometric characterization of a cyclic subgroup \mathbb{Z}^{13} in $S(8)$:

L. The quadruples of concircular points of one orbit form projective planes. This planes are of two types with respect to $Sz(8)$. The "lines" of the planes of the first type are incident with miquelian quadruples of points, and the "lines" of the second type are incident with non-miquelian quadruples of points.

REFERENCES

1. Luneburg, H. Die Suzukigruppe und ihre Geometrien. — Lectures Notes, Springer, 1965.
2. Лозанов, Ч., Г. Енева. Конечные немикелевы инверсные плоскости. — Плиска, Бълг. мат. студии, 9, 1987, 17–23.
3. Енева, Г. Über die Buschel in einer $S(q)$ -Mobiusebene. — Potsd. Forsch. B., 1984, № 41, 93–94.
4. Лозанов, Ч. Одна геометрическая характеристика четверок конциклических точек в инверсных немикелевых плоскостях $S(q)$. — Год. Соф. унив., 78, кн. 1, 1984, 114–120.
5. Russeva, A., Ch. Lozanov. On the geometry of a cyclic subgroup of the Suzuki group $Sz(8)$. — Proc. of the Union of Bulg. Math., XVIII, 1989, 191–196.

Received 01.06.1992

A GENERALIZED JACOBI OPERATOR IN THE 4-DIMENSIONAL RIEMANNIAN GEOMETRY*

GROZIO STANILOV, IRINA PETROVA

Грозю Станилов, Ирина Петрова. ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ЯКОБИ В 4-МЕРНОЙ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим римановое многообразие (M, g) размерности n с тензором кривизны R . В точке p берем 2-мерное касательное подпространство E^2 касательного пространства M_p , определенное ортонормальной парой векторов X, Y . Введем в рассмотрение линейный оператор $\lambda_{X,Y} : M_p \rightarrow M_p$ при помощи $\lambda_{X,Y}(u) = R(u, X, X) + R(u, Y, Y)$. Это симметрический оператор. Очень важно то, что этот оператор инвариантным относительно ортогональных преобразований в плоскости E^2 . Это дает нам возможность определить оператор относительно любой 2-мерной плоскости E^2 в точке p : $\lambda_{E^2} = \lambda_{X,Y}$. В общем случае его собственные значения зависят от точки p и от плоскости E^2 . Мы исследуем класс S -римановых многообразий размерности 4, для которых выполняется условие: собственные значения $c_i(p; E^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$, всех операторов λ_{E^2} не зависят от плоскости E^2 в точке p .

Grozio Stanilov, Irina Petrova. A GENERALIZED JACOBI OPERATOR IN THE 4-DIMENSIONAL RIEMANNIAN GEOMETRY

We consider a Riemannian manifold (M, g) of dimension n with curvature tensor R . At a point $p \in M$ we take a 2-dimensional tangent plane E^2 of the tangent space M_p , spanned by an orthonormal pair of vectors X, Y . We define the linear operator $\lambda_{X,Y} : M_p \rightarrow M_p$ by $\lambda_{X,Y}(u) = R(u, X, X) + R(u, Y, Y)$. It is a symmetric operator and a very important fact is namely the assertion it is invariant operator under the orthogonal transformations in E^2 . This gives us the possibility to define an operator in respect to any E^2 in M_p : $\lambda_{E^2} = \lambda_{X,Y}$. In

* Partially supported by the Ministry of Education and Science in Bulgaria under Contract MM — 18, 1991.

the general case its eigen values depend of p and of E^2 also. Then we investigate the class of S -Riemannian manifolds of dimension 4 with the property the eigen values $c_i(p; E^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$, of the operators λ_{E^2} are independent of E^2 .

1. THE CLASS S -RIEMANNIAN MANIFOLDS

Let (M, g) be a Riemannian manifold of dimension n , R — its curvature tensor. For $p \in M$ let X, Y be an orthonormal pair of vectors in M_p . We define a linear operator

$$\lambda_{X,Y} : M_p \rightarrow M_p$$

by

$$\lambda_{X,Y}(x) = R(x, X, X) + R(x, Y, Y).$$

It is a symmetrical operator. The following important proposition holds: the operator $\lambda_{X,Y}$ is invariant under the orthogonal transformations in the tangent subspace $E^2 = E^2(p; X \wedge Y)$ spanned by X, Y .

Indeed, if we have another orthonormal pair of vectors $\bar{X}, \bar{Y} \in E^2$, then $\lambda_{X,Y} = \lambda_{\bar{X},\bar{Y}}$.

We can define the operator

$$\lambda_{E^2} : M_p \rightarrow M_p$$

by

$$\lambda_{E^2} = \lambda_{X,Y}.$$

We call it generalized Jacobi operator in respect to E^2 .

Since λ_{E^2} is a symmetric operator, it has a real eigen values $c_i(p, E^2)$. Then we consider the class of 4-dimensional Riemannian manifolds with the following property:

- (S) the operator λ_{E^2} has eigen values independent of E^2 :
 $c_i(p, E^2) = c_i(p)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Any 4-dimensional Riemannian manifold with the property (S) we call S -Riemannian manifold.

In this paper we investigate the class S -Riemannian manifolds.

Remarks. 1. We suppose $c_1(p) \leq c_2(p) \leq c_3(p) \leq c_4(p)$.

2. If p is a fixed point we write c_i instead of $c_i(p)$.

Proposition. Every 4-dimensional Riemannian manifold with constant sectional curvature is an S -Riemannian manifold.

Proposition. Every S -Riemannian manifold is an Einsteinian manifold.

Proof. Let X, Y is an orthonormal pair in M_p . It is easy to get

$$\sum_{i=1}^4 c_i(p) = \rho(X, X) + \rho(Y, Y),$$

where ρ is the Ricci tensor. Hence for each $Z \in M_p$, $|Z| = 1$,

$$\rho(Z, Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_i(p).$$

From the second proposition and the well-known Herglotz theorem it follows that

$$\sum_{i=1}^4 c_i(p) = \text{const.}$$

2. MATRICES OF THE GENERALIZED JACOBI OPERATOR AND A LEMMA FOR THE SPECIAL BASES IN 4-DIMENSIONAL MANIFOLD

Let (M, g) be a 4-dimensional Riemannian manifold. We fix $p \in M$ and let x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p , and X, Y be an orthonormal pair in M_p . For the operator $\lambda_{X,Y}$ and for a real c we define the matrix $C^{X,Y}(c)$ in the following way

$$C^{X,Y}(c) = (c_{ik})_{i,k=1,2,3,4}, \quad c_{ik} = g(\lambda_{X,Y}(x_i), x_k) - \delta_{ik}c.$$

It is a symmetric matrix since $\lambda_{X,Y}$ is a symmetric operator. If c is a k -multiple eigen value of $\lambda_{X,Y}$, we have the relation

$$\text{rang } C^{X,Y}(c) + k = 4.$$

Next we write $C^{i,j}(c)$ and $C^{i,j+k}(c)$ instead of $C^{x_i, x_j}(c)$ and $C^{x_i, \frac{x_j+x_k}{\sqrt{2}}}(c)$, respectively.

Lemma. *Let (M, g) be a 4-dimensional manifold. For each $p \in M$ there exists an orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p , so that*

$$R(x_2, x_1, x_1, x_3) = 0, \quad R(x_2, x_1, x_1, x_4) = 0, \quad R(x_3, x_1, x_1, x_4) = 0.$$

The first vector $x_1, |x_1| = 1$, can be chosen arbitrarily.

Proof. We take $x_1 \in M_p$ with $|x_1| = 1$ and complete x_1 to x_1, x_2, x_3, x_4 — an orthonormal base of eigen vectors of the symmetrical Jacobi operator λ_{x_1} , defined by $\lambda_{x_1}(x) = R(x, x_1, x_1)$.

The bases in the Lemma will be called special bases.

3. SOME NOTATIONS FOR S-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Let (M, g) be an S-Riemannian manifold, $p \in M$, x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p . We set

$$\begin{aligned} R_{ijst} &= R(x_i, x_j, x_s, x_t), & r_{ij} &= R_{istj} + R_{itsj}, \\ l_{ij}^s &= R(x_i, x_s, x_s, x_j), & k_{ij} &= R(x_i, x_j, x_j, x_i), \end{aligned}$$

for all integers i, j, s, t from 1 to 4, different mutually. We have the following

- Lemma.** a) $k_{ij} = k_{st}$;
b) $l_{ij}^s + l_{ij}^t = 0$.

Proof. a) It follows from the fact that (M, g) is an Einsteinian manifold [1].

b) Since (M, g) is an Einsteinian manifold, the Ricci tensor is proportional to the metric tensor. Hence

$$0 = \rho(x_i, x_j) = R(x_i, x_s, x_s, x_j) + R(x_i, x_t, x_t, x_j) = l_{ij}^s + l_{ij}^t.$$

If x_1, x_2, x_3, x_4 is a special base of M_p , by lemma in section 2 we obtain

$$l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0.$$

For such a base the substantial components of R are $R_{1234}, R_{1342}, l_{12}^3, l_{13}^2, l_{14}^2, k_{12}, k_{13}, k_{14}$. In these notations and for such base we write the matrix $C^{1,2}(c)$. From section 2 we know

$$C^{1,2} = (c_{st})_{s,t=1,2,3,4},$$

$$c_{st} = g(\lambda_{x_1, x_2}(x_s), x_t) - \delta_{st}c,$$

$$c_{st} = R(x_s, x_1, x_1, x_t) + R(x_s, x_2, x_2, x_t) - \delta_{st}c.$$

Hence,

$$c_{11} = R(x_1, x_1, x_1, x_1) + R(x_1, x_2, x_2, x_1) - \delta_{11}c = k_{12} - c,$$

$$c_{12} = R(x_1, x_1, x_1, x_2) + R(x_1, x_2, x_2, x_2) - \delta_{12}c = 0,$$

$$c_{13} = R(x_1, x_1, x_1, x_3) + R(x_1, x_2, x_2, x_3) - \delta_{13}c = l_{13}^2,$$

$$c_{14} = R(x_1, x_1, x_1, x_4) + R(x_1, x_2, x_2, x_4) - \delta_{14}c = l_{14}^2,$$

$$c_{22} = R(x_2, x_1, x_1, x_2) + R(x_2, x_2, x_2, x_2) - \delta_{22}c = k_{12} - c,$$

$$c_{23} = R(x_2, x_1, x_1, x_3) + R(x_2, x_2, x_2, x_3) - \delta_{23}c = l_{23}^1 = 0,$$

$$c_{24} = R(x_2, x_1, x_1, x_4) + R(x_2, x_2, x_2, x_4) - \delta_{24}c = l_{24}^1 = 0,$$

$$c_{33} = R(x_3, x_1, x_1, x_3) + R(x_3, x_2, x_2, x_3) - \delta_{33}c = k_{13} + k_{23} - c = k_{13} + k_{14} - c,$$

$$c_{34} = R(x_3, x_1, x_1, x_4) + R(x_3, x_2, x_2, x_4) - \delta_{34}c = l_{34}^1 + l_{34}^2 = 0,$$

$$c_{44} = R(x_4, x_1, x_1, x_4) + R(x_4, x_2, x_2, x_4) - \delta_{44}c = k_{14} + k_{24} - c = k_{14} + k_{13} - c.$$

Then $C^{1,2}(c)$ is a symmetrical matrix of the form

$$C^{1,2}(c) = \begin{pmatrix} k_{12} - c & 0 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ 0 & k_{12} - c & 0 & 0 \\ l_{13}^2 & 0 & k_{13} + k_{14} - c & 0 \\ l_{14}^2 & 0 & 0 & k_{13} + k_{14} - c \end{pmatrix}.$$

In the same way we find the matrices

$$C^{1,3}(c) = \begin{pmatrix} k_{13} - c & l_{12}^3 & 0 & -l_{14}^2 \\ l_{12}^3 & k_{12} + k_{14} - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} - c & 0 \\ -l_{14}^2 & 0 & 0 & k_{12} + k_{14} - c \end{pmatrix},$$

$$C^{1,4}(c) = \begin{pmatrix} k_{14} - c & -l_{12}^3 & -l_{13}^2 & 0 \\ -l_{12}^3 & k_{12} + k_{13} - c & 0 & 0 \\ -l_{13}^2 & 0 & k_{12} + k_{13} - c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{14} - c \end{pmatrix},$$

$$C^{1,2+3}(c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_{12} + k_{13} - 2c & l_{12}^3 - l_{13}^2 & -(l_{12}^3 - l_{13}^2) & r_{14} \\ l_{12}^3 - l_{13}^2 & 2k_{12} + k_{14} - 2c & -k_{14} & 0 \\ -(l_{12}^3 - l_{13}^2) & -k_{14} & 2k_{13} + k_{14} - 2c & 0 \\ r_{14} & 0 & 0 & k_{12} + k_{13} + 2k_{14} - 2c \end{pmatrix},$$

$$C^{1,2+4}(c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_{12} + k_{14} - 2c & -(l_{12}^3 + l_{14}^2) & r_{13} & l_{12}^3 + l_{14}^2 \\ -(l_{12}^3 + l_{14}^2) & 2k_{12} + k_{13} - 2c & 0 & -k_{13} \\ r_{13} & 0 & k_{12} + 2k_{13} + k_{14} - 2c & 0 \\ l_{12}^3 + l_{14}^2 & -k_{13} & 0 & k_{13} + 2k_{14} - 2c \end{pmatrix},$$

$$C^{1,3+4}(c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_{13} + k_{14} - 2c & r_{12} & -(l_{13}^2 - l_{14}^2) & l_{13}^2 - l_{14}^2 \\ r_{12} & 2k_{12} + k_{13} + k_{14} - 2c & 0 & 0 \\ -(l_{13}^2 - l_{14}^2) & 0 & k_{12} + 2k_{13} - 2c & -k_{12} \\ l_{13}^2 - l_{14}^2 & 0 & -k_{12} & k_{12} + 2k_{14} - 2c \end{pmatrix}.$$

4. THEOREM FOR THE LOCAL POSSIBILITIES. A CONSEQUENCE

Theorem. Let (M, g) be an S -Riemannian manifold. Then for every $p \in M$ one of the following possibilities holds:

- a) $0 = c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4$ or $c_1 \leq c_2 = c_3 = c_4 = 0$;
- b) $c_1 = c_2 < c_3 = c_4$.

If x_1, x_2, x_3, x_4 is an orthonormal base of M_p , so that

$$l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0,$$

then a) implies $k_{12} = k_{13} = k_{14} = 0$, and b) implies $k_{12} + k_{13} + k_{14} = c_1 + c_3$, $(k_{12} - c_1)(k_{12} - c_3) = 0$, $(k_{13} - c_1)(k_{13} - c_3) = 0$, $(k_{14} - c_1)(k_{14} - c_3) = 0$.

Proof. For c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) we have the following logical possibilities:

- P_1 . There are at least three equal among them;
- P_2 . They are two by two equal;
- P_3 . There are at least three different among them.

We prove that P_1 implies a), P_2 implies b) and P_3 is impossible.

4.1. The case P_1 . We have

$$c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4 \quad \text{or} \quad c_1 \leq c_2 = c_3 = c_4.$$

Hence c_2 is at least 3-multiple eigen value. Let x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p , so that $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. Then $\text{rang } C^{1,i}(c_2) \leq 1$ ($i = 2, 3, 4$). All minors of order 2 of these matrices are 0 and then $k_{12} = k_{13} = k_{14} = c_2 = 0$.

4.2. The case P_2 . We have $c_1 = c_2 < c_3 = c_4$. Let x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p , so that $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. We have $\text{rang } C^{1,2}(c) = 2$ for $c \in \{c_1, c_3\}$. It follows that $(k_{12} - c)(k_{13} + k_{14} - c) = 0, \quad c \in \{c_1, c_3\}$. Then

$$(k_{12} - c_1)(k_{13} + k_{14} - c_1) = (k_{12} - c_3)(k_{13} + k_{14} - c_3).$$

The developing of this identity gives $k_{12} + k_{13} + k_{14} = c_1 + c_3$. Then follows

$$(k_{12} - c_1)(k_{12} - c_3) = 0.$$

Considering the matrices $C^{1,3}(c)$ and $C^{1,4}(c)$ we get the last two relations in the theorem.

4.3. The case P_3 . Let $\Omega = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Because of P_3 Ω has at least 3 different elements. Let again x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p , so that $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. We set $\lambda_1 = l_{12}^3, \lambda_2 = l_{13}^2, \lambda_3 = l_{14}^2$. Since $\det C^{1,3+4}(c) = 0$ ($c \in \Omega$), we have

$$f(c) - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 g(c) = 0 \quad (c \in \Omega),$$

where

$$g(c) = (k_{13} + k_{14} - 2c)(2k_{12} + k_{13} + k_{14} - 2c),$$

$$\tilde{f}(c) = (2(k_{13} - c)(k_{14} - c) + k_{12}(k_{13} + k_{14} - 2c))(g(c) - r_{12}^2).$$

Taking the base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p we get

$$f(c) - (\lambda_2 + \lambda_3)^2 g(c) = 0 \quad (c \in \Omega).$$

Then

$$4\lambda_2\lambda_3g(c) = 0 \quad (c \in \Omega).$$

The polynomial $g(c)$ is of degree 2. It has no more than two different roots. But Ω has at least three different elements. Hence $\lambda_2\lambda_3 = 0$. $C^{1,2+3}(c)$ and $C^{1,2+4}(c)$ provide analogously $\lambda_1\lambda_2 = 0, \lambda_1\lambda_3 = 0$. Hence at least two among the $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ are 0. Supposing that $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, from the equality $\det C^{1,2}(c) = 0$ for $c \in \Omega$ we get

$$(k_{12} - c)(k_{13} + k_{14} - c) = 0, c \in \Omega.$$

It is impossible because Ω has at least three different elements.

4.4. A consequence. Let M_p be S -Riemannian manifold, $p \in M$, so that $c_1 = c_2 < c_3 = c_4$. Let x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base of M_p with $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. Then

1) If $c_1 = 0$ then $\{k_{12}, k_{13}, k_{14}\} = \{0, 0, c_3\}$;

2) If $c_3 = 0$ then $\{k_{12}, k_{13}, k_{14}\} = \{0, 0, c_1\}$;

3) If $c_1 \neq 0, c_3 \neq 0$ then $|c_1| \neq |c_3|$ and $k_{12} = k_{13} = k_{14} = \kappa$, where

$$\kappa = \begin{cases} c_1, & \text{if } |c_1| < |c_3|, \\ c_3, & \text{if } |c_3| < |c_1|. \end{cases}$$

Remark. $\{k_{12}, k_{13}, k_{14}\} = \{0, 0, c_3\}$ means that among the numbers k_{12}, k_{13}, k_{14} two of them are 0 and the third is c_3 .

The proof uses only the curvature relations in the theorem in this section.

5. THE CLASS F-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Let (M, g) be a 4-dimensional Riemannian manifold, $p \in M$, $X \in M_p$, $|X| = 1$. The well-known Jacobi operator is defined in the following way:

$$\lambda_X(x) = R(x, X, X).$$

It is a symmetrical operator and its eigen values are real numbers depending of p and X . We consider the class of the 4-dimensional Riemannian manifolds with the property

(F) For each $p \in M$ and for every (unit) $X \in M_p$ the Jacobi operator λ_X has eigen values $d_i(p, X)$ independent of X ,
i. e. $d_i(p, X) = d_i(p)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Any 4-dimensional Riemannian manifold with this property will be called F-Riemannian manifold. This class is investigated in [2], [3], [4]. It is well-known that every 4-dimensional Riemannian manifold of constant sectional curvature is F-Riemannian manifold and every F-Riemannian manifold is Einsteinian manifold. For such a manifold we have the relations $k_{ij} = k_{st}$, $l_{ij}^i + l_{ij}^j = 0$.

To every operator λ_X we can associate the matrices $D^X(d)$ in a way like that in section 2:

$$D^X(d) = (d_{st})_{s,t=1,2,3,4}, \quad d_{st} = g(\lambda_X(x_s), x_t) - \delta_{st}d.$$

If d is k -multiple eigen value of λ_X , then $\text{rang } D^X(d) + k = 4$. Instead of $D^{x_i}(d)$ and $D^{\frac{x_i+x_j}{\sqrt{2}}}(d)$ we shall write $D^i(d)$ and $D^{i+j}(d)$ respectively.

6. COMPARISON OF BOTH CLASSES

Theorem. *If (M, g) is an S-Riemannian manifold, then it is also an F-Riemannian manifold. The converse is not true.*

Proof. 1) Let (M, g) be an S-Riemannian manifold, $p \in M$. We take $X \in M_p$ with $|X| = 1$. Let $d_i(p)$, $i = 1, 2, 3, 4$, are the eigen values of λ_X . We set

$$\Psi(p, X) = \{d_i(p, X) \mid i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Then we consider the orthonormal base $X = x_1, x_2, x_3, x_4$ of eigen vectors of λ_X in M_p . Hence $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. Let $d_i(p, X)$ corresponds to x_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Then

$$d_1(p, X) = 0, \quad d_2(p, X) = k_{12}, \quad d_3(p, X) = k_{13}, \quad d_4(p, X) = k_{14}.$$

Hence

$$\Psi(p, X) = \{0, k_{12}, k_{13}, k_{14}\}.$$

From the theorem for the local possibilities in p one of the following cases holds:

- a) $0 = c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4$ or $c_1 \leq c_2 = c_3 = c_4 = 0$;
- b) $0 = c_1 = c_2 < c_3 = c_4$;
- c) $c_1 = c_2 < c_3 = c_4 = 0$;

d) $0 \neq c_1 = c_2 < c_3 = c_4 \neq 0$.

Using this theorem and the consequence of it we obtain for the cases a), b), c) and d) correspondingly:

$$a') \Psi(p, X) = \{0, 0, 0, 0\},$$

$$b') \Psi(p, X) = \{0, 0, 0, c_3\},$$

$$c') \Psi(p, X) = \{0, 0, 0, c_1\},$$

$$d') \Psi(p, X) = \{0, \kappa, \kappa, \kappa\},$$

where κ is the smaller by module number between c_1 and c_3 . It means that the elements of $\Psi(p, X)$ are independent of X and hence (M, g) is an F-Riemannian manifold.

2) The 4-dimensional Kaehlerian manifolds with constant non-zero holomorphic sectional curvature are F-Riemannian manifolds, but they are not S-Riemannian manifolds.

7. LEMMA FOR THE SPECIAL BASES IN AN S-RIEMANNIAN MANIFOLD

From the theorem in section 6 we get the following

Consequence. *If (M, g) is an S-Riemannian manifold and in $p \in M$ holds:*

a) $0 = c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4$ or $c_1 \leq c_2 = c_3 = c_4 = 0$,

then every λ_X has 4-multiple eigen value 0;

b) $0 = c_1 = c_2 < c_3 = c_4$ or $c_1 = c_2 \leq c_3 = c_4 = 0$,

then every λ_X has 3-multiple eigen value 0.

Using it, we can prove the following

Lemma. *Let (M, g) be an S-Riemannian manifold, $p \in M$, and in p holds a) or b) of the above consequence.*

Then there is an orthonormal base of M_p , so that $l_{ij}^s = 0$ for all integers i, j, s from 1 to 4, unequal mutually. The first vector x_1 can be chosen arbitrarily.

Proof. Let x_1, x_2, x_3, x_4 be an orthonormal base so that $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. If in p a) holds, we have

$$\text{rang } D^2(0) = \text{rang } D^3(0) = 0,$$

and if in p b) holds, we have

$$\text{rang } D^2(0) = \text{rang } D^3(0) = 1.$$

In both cases we obtain by considering suitable minors that $l_{12}^3 = l_{13}^2 = l_{14}^2 = 0$.

8. A MORE PRECISE VARIANT OF THE THEOREM FOR THE LOCAL POSSIBILITIES

Theorem. *Let (M, g) be an S-Riemannian manifold, $p \in M$. For p holds one of the following possibilities:*

a) $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

In such case the sectional curvature of M in p is 0;

b) $0 = c_1 = c_2 < c_3 = c_4$.

In this case there is an orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p , so that the only substantial components of R are

$$R_{1234} = R_{1342} = \frac{c_3}{3}, \quad k_{14} = c_3;$$

c) $c_1 = c_2 < c_3 = c_4 = 0$.

In this case there is an orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p , so that the substantial components of R are

$$R_{1234} = R_{1342} = \frac{c_1}{3}, \quad k_{14} = c_1;$$

d) $0 < c_1 = c_2 < c_3 = c_4, \quad c_3 = 2c_1$.

In this case the sectional curvature of M in p is c_1 ;

e) $c_1 = c_2 < c_3 = c_4 < 0, \quad c_1 = 2c_3$.

In this case the sectional curvature of M in p is c_3 .

P R O O F. In p holds one of the following possibilities:

a) $0 = c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4$ or $c_1 \leq c_2 = c_3 = c_4 = 0$,

b) $0 = c_1 = c_2 < c_3 = c_4$,

c) $c_1 = c_2 < c_3 = c_4 = 0$,

d) $0 \neq c_1 = c_2 < c_3 = c_4 \neq 0$.

1) Let in p holds a). We shall prove that if three of the numbers c_1, c_2, c_3, c_4 are 0, then the fourth is also 0. Let suppose $0 = c_1 = c_2 = c_3 \leq c_4$. By the lemma in section 7 we take an orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p such that $l_{ij}^s = 0$ for i, j, s from 1 to 4, unequal mutually. From the theorem for the local possibilities we have $k_{12} = k_{13} = k_{14} = 0$. The eigen value c_4 is at least 1-multiple. Hence $\det C^{1,2}(c_4) \neq 0$ and then $c_4 = 0$. Then $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

Let E^2 be any 2-dimensional tangent subspace in M_p and X, Y be an orthonormal base of M_p . We set $x_1 = X$ and complete x_1 to x_1, x_2, x_3, x_4 — an orthonormal base of M_p with the property $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. From the theorem for the local possibilities we have $k_{12} = k_{13} = k_{14} = 0$. Using $Y = \alpha^i x_i$,

$\sum_{i=2}^4 (\alpha^i)^2 = 1$, one can check easily that $K(E^2) = 0$.

2) Let in p holds b), i. e.

$$0 = c_1 = c_2 < c_3 = c_4.$$

We use again an orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p , so that $l_{ij}^s = 0$ for all i, j, s from 1 to 4 different mutually. From the consequence in section 4 $\{k_{12}, k_{13}, k_{14}\} = \{0, 0, c_3\}$. If it is necessary we can renumber the vectors x_1, x_2, x_3, x_4 to get $k_{12} = k_{13} = 0, k_{14} = c_3$. From the consequence in section 7 we know that every operator λ_X has 3-multiple eigen value 0. Then $\text{rang } D^{1+2}(0) = \text{rang } D^{1+4}(0) = 1$. This implies

$$r_{12} = -c_3 \quad \text{or} \quad r_{12} = c_3, \quad r_{14} = 0.$$

If it is necessary we can change x_1 with $-x_1$ to get $r_{12} = c_3$. Using the first Bianchi identity we obtain $R_{1234} = R_{1342} = \frac{c_3}{3}$.

3). Let in p holds d), i. e.

$$0 \neq c_1 = c_2 < c_3 = c_4 \neq 0.$$

We take the orthonormal base x_1, x_2, x_3, x_4 of M_p such that $l_{23}^1 = l_{24}^1 = l_{34}^1 = 0$. From the consequence in section 4 $k_{12} = k_{13} = k_{14} = \kappa$, where

$$\kappa = \begin{cases} c_1, & \text{if } |c_1| < |c_3| \\ c_3, & \text{if } |c_3| < |c_1|. \end{cases}$$

In p we have $\kappa = c_1$ or $\kappa = c_3$.

Let in p holds $\kappa = c_1$. Then $k_{12} = k_{13} = k_{14} = c_1$. From the theorem of the local possibilities we have $k_{12} + k_{13} + k_{14} = c_1 + c_3$. Hence $c_3 = 2c_1$. But $c_1 < c_3$. Hence $c_1 > 0$. Then $0 < c_1 = c_2 < c_3 = c_4$, $c_3 = 2c_1$. It is easy to check that for every E^2 in M_p

$$K(E^2) = c_1.$$

Consequence 1. Let (M, g) be an S -Riemannian manifold. If one of $c_i(p)$, $i = 1, 2, 3, 4$, is a global constant the others are also global constants.

Proof. We have $\sum_{i=1}^4 c_i(p) = \text{const}$ (from the consequence in section 1) and $c_1(p) = c_2(p)$, $c_3(p) = c_4(p)$ (from the above theorem).

Consequence 2. Let (M, g) be an S -Riemannian manifold and for every point $p \in M$ holds $c_2 = c_3$. Then M is flat.

Proof. At every point $p \in M$ holds a) from the above theorem.

Consequence 3. Let (M, g) be an S -Riemannian manifold and let for every $p \in M$ holds $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Then M is non-flat with constant sectional curvature.

Proof. In every point $p \in M$ holds e) or d) from the above theorem. Then we apply the well-known Schur's theorem.

Consequence 4. Let (M, g) be an S -Riemannian manifold with sectional curvature $K(p, E^2)$ and let $K(p, E^2) \neq 0$ for every point p and for every E^2 in M_p . Then M is non-flat with constant sectional curvature.

Proof. In every point $p \in M$ holds e) or d) from the above theorem because in the cases a), b), c) there are planes E^2 with sectional curvature 0.

REFERENCES

1. Станилов, Г. Обобщение на римановата кривина и някои приложения. — Известия на Математическия институт на БАН, т. XIV, 1973, 211–241.
2. Stanilov, G. Curvature operators in the Riemannian geometry. — Proc. of the Colloquium on Differential geometry and Applications, Eger, 1989.
3. Stanilov, G. On the geometry of the Jacobi operators of 4-dimensional Riemannian manifolds. — Tensor, N. S., 51, 1992, 9–15.
4. Quo-Shin Chi. A curvature characterization of certain locally Rank — one symmetric spaces. — J. of Diff. Geometry, 28, 1988, 187–202.

Received 01.06.1992

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХОПФА

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХОПФА

Доказано, что для любого непрерывного отображения $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ n -мерной сферы $S^n = \{x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| \leq 1\}$ в n -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^n и для любого δ , $0 < \delta < 2$, найдется пара точек x, y , для которых $\|x - y\| = \delta$ и $f(x) = f(y)$. С помощью этого предложения приводится доказательство теоремы Хопфа, согласно которой для любого покрытия сферы S^n $n + 1$ замкнутыми подмножествами хотя бы одно из них содержит пару точек на расстоянии δ .

Nikolay Khadzhiivanov. ON A THEOREM OF HOPF

It is proved that for every continuous mapping $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and δ , $0 < \delta < 2$, there exists a pair of points x, y with $\|x - y\| = \delta$ and $f(x) = f(y)$. The well-known theorem of Hopf is deduced from the above proposition: for every closed cover F_1, F_2, \dots, F_{n+1} of the n -sphere S^n and for every δ , $0 < \delta < 2$, there exists a triple x, y, F_i such that $\|x - y\| = \delta$ and $x, y \in F_i$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во избежания недоразумений начнем с нескольких обозначений. Через \mathbb{R}^{n+1} обозначаем $(n + 1)$ -мерное евклидово пространство, через $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ — единичная n -мерная сфера, а $D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ — единичный n -мерный шар в координатной плоскости $x_{n+1} = 0$. Отрезок в \mathbb{R}^{n+1} , соединяющий начало O с точкой $X = (0, \dots, 0, 1)$, обозначим через T , а множество $\Gamma^n = D^n \cup T$ назовем n -мерной кнопкой.

Согласно классической теореме Борсука–Улама, для всякого непре-

рыного отображения $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$, для которой $f(x) = f(-x)$.

В [1, 2] нами доказана следующая теорема о кнопке:

Если $f : G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение n -мерной кнопки в \mathbb{R}^n , то в G^n существует пара точек x, y , удовлетворяющая условиям $f(x) = f(y)$, $\|x - y\| = 1$ и дополнительному условию — если x и y принадлежат D^n , тогда отрезок $[x, y]$ содержит начало O .

При помощи теоремы о кнопке докажем следующее усиление теоремы Борсука–Улама:

Теорема 1. Пусть $0 < \delta \leq 2$ и $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда существует точки $x, y \in S^n$, для которых $f(x) = f(y)$ и $\|x - y\| = \delta$.

Напомним теорему Люстерника–Шнирельмана–Борсука, согласно которой, для любого покрытия S^n с помощью $n + 1$ замкнутых множеств найдется такое из них, которое содержит пару диаметрально противоположных точек.

Хопф усилил эту теорему следующим образом:

Теорема 2. Если $0 < \delta \leq 2$ и сфера S^n покрыта объединением $n + 1$ замкнутых множеств, тогда хотя бы одно из них содержит пару точек x, y , расстояние между которыми равняется δ .

Библиографию по затронутым вопросам читатель может найти в монографии Грюнбаума [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение:

Лемма 1. Для любого δ , $0 < \delta \leq 2$, и для любой точки $\Omega \in S^n$ существует непрерывное отображение $\varphi : D^n \rightarrow S^n$, такое что $\varphi(O) = \Omega$ и, кроме того, удовлетворяет следующему требованию: если отрезок $[u, v]$ ($u, v \in D^n$) содержит начало O и $\|u - v\| = 1$, тогда $\|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \delta$.

Доказательство. Построим сначала искомое отображение φ в частном случае, когда $\Omega = \mathcal{K}$. По существу этим доказательство завершается — достаточно взять суперпозицию полученного отображения и изометрии сферы на себя, при которой \mathcal{K} переходит в Ω .

Положим $\alpha = 2 \arcsin \frac{\delta}{2}$. Определим искомое отображение φ следующим образом: если $u = (u_1, \dots, u_n, 0)$, тогда

$$\varphi(u) = \left(\frac{\sin \alpha \|u\|}{\|u\|} u_1, \dots, \frac{\sin \alpha \|u\|}{\|u\|} u_n, \cos \alpha \|u\| \right).$$

Ясно, что $\|\varphi(u)\| = 1$, $\varphi(O) = \mathcal{K}$ и $\varphi : D^n \rightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Пусть теперь отрезок $[u, v]$ ($u, v \in D^n$) содержит O . Тогда

$\frac{v}{\|v\|} = -\frac{u}{\|u\|}$. Из дополнительного предположения $\|u - v\| = 1$ следует, что $\|u\| + \|v\| = 1$. Тогда

$$-\varphi(v) = \left(\frac{\sin \alpha \|v\|}{\|u\|} u_1, \dots, \frac{\sin \alpha \|v\|}{\|u\|} u_n, -\cos \alpha \|v\| \right)$$

и таким образом

$$\begin{aligned} \|\varphi(u) - \varphi(v)\| &= \sqrt{(\sin \alpha \|u\| + \sin \alpha \|v\|)^2 + (\cos \alpha \|u\| - \cos \alpha \|v\|)^2} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

А теперь перейдем к доказательству самой теоремы.

Пусть $0 < \delta \leq 2$ и $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Надо доказать, что существуют точки $x, y \in S^n$, для которых $f(x) = f(y)$ и $\|x - y\| = \delta$.

Пусть Ω' — одна из самых удаленных от начала точек на множестве $f(S^n)$ и Ω — такая точка из S^n , для которой $f(\Omega) = \Omega'$.

Через T' обозначим некоторый отрезок с началом Ω' , который имеет единственную общую точку с $f(S^n)$ — можно взять этот отрезок на луче $\overline{O\Omega'}$, которой, согласно определению точки Ω' , не содержит точек из $f(S^n)$ вне отрезка $[O, \Omega']$. Пусть $h : T \rightarrow T'$ — гомеоморфизм и $h(O) = \Omega'$.

Согласно лемме, имеется непрерывное отображение $\varphi : D^n \rightarrow S^n$, для которого $\varphi(O) = \Omega$ и, кроме того, если $u \in D^n, v \in D^n, O \in [u, v], \|u - v\| = 1$, тогда $\|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \delta$.

Построим отображение $\mathcal{F} : \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} h(u), & \text{если } u \in T; \\ f(\varphi(u)), & \text{если } u \in D^n. \end{cases}$$

Отображение \mathcal{F} определено корректно, потому что $h(O) = \Omega' = f(\Omega) = f(\varphi(O))$. Очевидно это отображение непрерывно.

Определенное отображение \mathcal{F} имеет и следующее свойство:

$$\text{если } \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \text{ и } u \neq v, \text{ тогда } u \in D^n \text{ и } v \in D^n.$$

Действительно, допустим, что например $v \notin D^n$. Если и $u \notin D^n$, тогда $\mathcal{F}(u) = h(u), \mathcal{F}(v) = h(v)$ и так как h — гомеоморфизм, то $h(u) \neq h(v)$, что является противоречием. Если $u \in D^n$, тогда $\varphi(u) \in S^n$ и следовательно $\mathcal{F}(u) = f(\varphi(u)) \in f(S^n)$, а с другой стороны $\mathcal{F}(v) = h(v) \in T'$, так что $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \in f(S^n) \cap T'$. Но пересечение $f(S^n) \cap T'$ состоит из единственной точки Ω' и следовательно $h(v) = \Omega'$, что является противоречием, потому что $\Omega' = h(O)$, а $v \neq O$.

Дополнительное свойство отображения \mathcal{F} доказано.

Согласно теореме о кнопке, непрерывное отображение $\mathcal{F} : \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ склеивает некоторую пару точек u, v кнопки Γ^n на расстоянии 1, удовлетворяющие к тому же следующее: если $u \in D^n$ и $v \in D^n$, тогда отрезок

$[u, v]$ содержит начало O . В нашем случае последнее выполнено, потому что, как мы только-что доказали, из $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$ и $u \neq v$ следует $u \in D^n$, $v \in D^n$.

Положим $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$. Равенство $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$ и включения $u \in D^n$, $v \in D^n$ дают (см. определение отображения \mathcal{F}) $x \in S^n$, $y \in S^n$, $f(x) = f(y)$. Кроме того, согласно лемме, $\|x - y\| = \delta$.

Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 2

Будем говорить, что метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$ имеет тип $(S^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$, если для любого δ , $0 < \delta \leq \text{diam} X$, и для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует хотя бы одна пара точек x, y , для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $f(x) = f(y)$. Очевидно n -мерная сфера S^n имеет тип $(S^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ (см. теорему 1).

Теорема 2 является тривиальным следствием из следующего более общего утверждения:

Теорема 3. Пусть метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$ имеет тип $(S^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и δ удовлетворяет неравенствам $0 < \delta \leq \text{diam} X$. Тогда для любого покрытия пространства X замкнутыми множествами F_1, F_2, \dots, F_{n+1} найдется такая пара точек x, y которые содержатся в одних и тех же F_i .

Доказательство. Через \mathbb{R}_{+i}^{n+1} , $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, обозначим множество всех точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, для которых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0$ и $x_i = 0$. Легко сообразить, что подпространство $P = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}_{+i}^{n+1}$ пространства \mathbb{R}^{n+1} гомеоморфно пространству \mathbb{R}^n . Определим непрерывное отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом:

$$f(x) = (\rho(x, F_1), \rho(x, F_2), \dots, \rho(x, F_{n+1})).$$

Для любого x имеется i с $\rho(x, F_i) = 0$, так что $f(x) \in P$. Следовательно f является непрерывным отображением пространства X в пространство \mathbb{R}^n и так как X имеет тип $(S^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$, то существует пара точек x, y из X , для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $f(x) = f(y)$. Последнее равенство означает, что

$$\rho(x, F_1) = \rho(y, F_1), \rho(x, F_2) = \rho(y, F_2), \dots, \rho(x, F_{n+1}) = \rho(y, F_{n+1}).$$

Таким образом $\rho(x, F_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(y, F_i) = 0$. Множество F_i — замкнуто и поэтому равенство $\rho(x, F_i) = 0$ эквивалентно включению $x \in F_i$.

Окончательно, существуют точки x и y из X , для которых $\rho(x, y) = \delta$ и $x \in F_i \iff y \in F_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. Непрекъснати изображения на кабърчета в евклидови пространства. — II-ра пролетна конф. на ВМД, Видин, 6-8 април 1973. София, БАН, 1974, 221-230.
2. Хаджииванов, Н. Непрерывные отображения кнопок в \mathbb{R}^n . Бюллетень Польской академии наук, Серия мат., астр. и физ. наук, т. XXII, № 3, 1974, 283-287.
3. Грюнбаум, Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. Москва, 1971.

Поступила 10.02.1992

О $(3, 4)$ -ГРАФАХ РАМСЕЯ БЕЗ 9 -КЛИК

НЕДЯЛКО НЕНОВ

Недялко Ненов. О $(3, 4)$ -ГРАФАХ РАМСЕЯ БЕЗ 9 -КЛИК

Множество из p вершин графа называется p -кликкой, если любые две из них смежны. Граф называется $(3, 4)$ -графом Рамсея, если в любой 2 -раскраске его ребер есть одноцветная 3 -кликка 1 -ого цвета, либо одноцветная 4 -кликка 2 -ого цвета; β обозначает наименьшее натуральное число n для которого существует $(3, 4)$ -граф Рамсея с n вершинами и без 9 -клик. В этой работе доказывается, что $\beta = 14$.

Nedjalko Nenov. ON THE $(3, 4)$ -RAMSEY GRAPHS WITHOUT 9 -CLIQUES

A set of p vertices of a graph is called p -clique if any two of them are adjacent. The graph is called $(3, 4)$ -Ramsey graph if for every 2 -colouring of the edges there exists a monochromatic 3 -clique of the 1 -th colour, or a monochromatic 4 -clique of the 2 -th colour; β denotes the minimal natural number n such that there is a $(3, 4)$ -Ramsey graph with n vertices and without 9 -cliques. In this paper it is proved that $\beta = 14$.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Под графом будем понимать упорядоченную пару $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2 -элементных подмножеств множества $V(G)$. Элементы множества $V(G)$ называются вершинами графа G , а элементы множества $E(G)$ — ребрами графа G . Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$ будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \dots, v_p \in V(G)$ называется p -кликкой графа G , если любые две из них смежны. Наибольшее число p , для которого граф G имеет p -кликку, называется кликовым числом графа G и

обозначается $cl(G)$. Дополнение графа G обозначается \bar{G} . Напомним, что $V(\bar{G}) = V(G)$ и $[v_i, v_j] \in E(\bar{G}) \iff [v_i, v_j] \notin E(G)$. Множество вершин $V' \subset V(G)$ называется независимым множеством вершин графа G , если любые две его вершины несмежны. Наибольшее число n , для которого граф G имеет n вершин, составляющих независимое множество вершин, называется числом независимости графа G и обозначается $\alpha(G)$. Ясно, что $\alpha(G) = cl(\bar{G})$. Разложение

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

называется r -хроматическим разложением графа G , если $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$ и любое из множеств V_i , $1 \leq i \leq r$, является независимым множеством вершин графа G . Наименьшее натуральное число r для которого граф G обладает r -хроматическим разложением называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$.

Граф $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ называется подграфом графа G , если $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$. Пусть $v_1, \dots, v_s \in V(G)$. Через $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ обозначим подграф графа G , порожденный множеством вершин v_1, \dots, v_s , т. е. такой подграф G_1 для которого $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_s\}$ и $[v_i, v_j] \in E(G_1) \iff [v_i, v_j] \in E(G)$.

Простым циклом длины n графа G называется упорядоченное множество его вершин $v_1, \dots, v_n \in V(G)$ такое, что $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n], [v_n, v_1] \in E(G)$ и обозначается C_n . Если $|V(G)| = n$ и любые две вершины графа G смежны, тогда G называется полным графом с n вершинами и обозначается K_n . Через $G - v$, $v \in V(G)$, обозначается подграф, получающийся от G после удаления его вершины v . Для любого подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $Ad(V')$ будем обозначать множество всех вершин графа G , которые смежны всем вершинам подмножества V' .

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Через $G_1 + G_2$ обозначим граф G , для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где $E' = \{[v_1, v_2] \mid v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определение. Любое разложение $E(G) = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, называется *2-раскраской ребер графа G* .

Определение. Граф G называется *(3, 4)-графом Рамсея*, если в любой 2-раскраске $E(G) = E_1 \cup E_2$ его ребер либо существует 3-клика все ребра которой принадлежат E_1 , либо существует 4-клика все ребра которой принадлежат E_2 .

Самым простым примером (3, 4)-графа Рамсея является граф K_9 , [4]. Из этого следует, что если $cl(G) \geq 9$, тогда граф G является (3, 4)-графом Рамсея. Существуют (3, 4)-графы Рамсея с кликовым числом меньше 9. Таким является граф $K_4 + C_5 + C_5$, [1], [2]. В [1] и [3] доказано, что если G является (3, 4)-графом Рамсея и $cl(G) < 9$, тогда $|V(G)| \geq 13$.

Через β обозначим наименьшее естественное число n , для которого существует $(3, 4)$ -граф Рамсея G с n вершинами и $\text{cl}(G) < 9$. Из сказанного вытекает, что $13 \leq \beta \leq 14$. В настоящей работе докажем:

Теорема. Пусть G — граф, $|V(G)| = 13$ и $\text{cl}(G) < 9$. Тогда граф G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Из этой теоремы следует, что окончательно $\beta = 14$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1 ([5]). Если $\chi(G) \leq 8$, тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Лемма 2 ([1], [3]). Пусть

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_9$$

является 9-роматическим разложением графа G , такое что среди подмножеств V_i , $1 \leq i \leq 9$, можно выбрать три, объединение которых порождает подграф без 3-клик. Тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Лемма 3 ([1], [3]). Пусть

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_9$$

является 9-роматическим разложением, такое что среди подмножеств V_i , $1 \leq i \leq 9$, можно выбрать четыре, объединение которых порождает подграф без 4-клик. Тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Очевидно лемма 1 и лемма 2 следуют из леммы 3.

Лемма 4 ([1], [3]). Пусть $|V(G)| \leq 12$ и $\text{cl}(G) < 9$. Тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Лемма 5. Пусть $|V(G)| = 13$ и $\text{cl}(G) < 9$. Если граф G имеет несмежные вершины u и v такие, что $\text{Ad}(u) \subseteq \text{Ad}(v)$, тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Доказательство. Рассмотрим подграф $G - u$. Согласно лемме 4 этот подграф не является $(3, 4)$ -графом Рамсея, т. е. существует 2-раскраска $E'_1 \cup E'_2$ его ребер такая, что нет 3-клик подграфа $G - u$ все ребра которой принадлежат E'_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E'_2 . Дополним эту 2-раскраску до 2-раскраски $E_1 \cup E_2$ ребер графа G следующим образом: если $[u, w] \in E(G)$, тогда $[u, w] \in E_i \iff [v, w] \in E'_i$, $i = 1, 2$, а остальные ребра раскрашены как в подграфе $G - u$. Из $[u, v] \notin E(G)$ и $\text{Ad}(u) \subseteq \text{Ad}(v)$ вытекает, что в $E_1 \cup E_2$ нет 3-клики все ребра которой принадлежат E_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E_2 . Это означает, что G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Лемма 6. Пусть $|V(G)| = 10$, $\text{cl}(G) < 9$ и $\alpha(G) = 2$. Тогда дополнение \bar{G} графа G имеет два ребра без общих вершин.

Доказательство. Из $\text{cl}(G) < 9$ следует, что в G есть две несмежные вершины v_1 и v_2 . Если среди остальных вершин v_3, \dots, v_{10} есть две несмежные, тогда утверждение доказано. Поэтому предположим, что $\{v_3, \dots, v_{10}\} = K_8$. Из $\text{cl}(G) < 9$ следует, что v_1 несмежна некоторой из

вершин v_3, \dots, v_{10} . То же самое верно и для v_2 . Из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 не смежны разным вершинам множества $\{v_3, \dots, v_{10}\}$. Этим лемма доказана.

Лемма 7. Если $|V(G)| = 13$, $\text{cl}(G) < 9$ и $\alpha(G) = 2$, тогда дополнение \bar{G} графа G имеет четыре ребра любые два из которых не имеют общих вершин.

Доказательство. Согласно лемме 6 существуют вершины $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G)$ такие, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$ и $[v_3, v_4] \notin E(G)$. Остальные вершины графа G обозначим через v_5, \dots, v_{13} . Из $\text{cl}(G) < 9$ следует, что две из этих вершин несмежны. Пусть например $[v_5, v_6] \notin E(G)$. Положим $T = \{v_7, \dots, v_{13}\}$. Если в T есть несмежные вершины, тогда утверждение доказано. Теперь предположим, что $\langle T \rangle = K_7$. Если $v_1 \notin \text{Ad}(T)$ и $v_2 \notin \text{Ad}(T)$, тогда из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 несмежны разным вершинам множества T , что доказывает утверждение леммы. Следовательно, хотя бы одна из вершин v_1, v_2 принадлежит $\text{Ad}(T)$. Пусть например $v_1 \in \text{Ad}(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще, что $v_3 \in \text{Ad}(T)$ и $v_5 \in \text{Ad}(T)$. Так как $\langle T \rangle = K_7$ и $\text{cl}(G) < 9$, то $\{v_1, v_3, v_5\}$ независимое множество. Это противоречит условию $\alpha(G) = 2$.

Лемма 8. Если $|V(G)| = 13$, $\text{cl}(G) < 9$ и $\alpha(G) \geq 3$, тогда G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Доказательство. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ независимое множество вершин графа G , а v_4, \dots, v_{13} остальные вершины этого же графа. Из $\text{cl}(G) < 9$ следует $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{13} \rangle) \geq 2$. Рассмотрим следующие два случая:

Случай 1. $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{13} \rangle) \geq 3$. В этой ситуации можно предположить, что $\{v_4, v_5, v_6\}$ независимое множество. Тогда

$$(1) \quad V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \dots \cup \{v_{13}\}$$

является 9-хроматическим разложением графа G . Положим $T = \{v_7, \dots, v_{13}\}$. Если в T есть несмежные вершины, тогда группируя несмежные его вершины из (1) получаем 8-хроматическое разложение графа G . Согласно лемме 1 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Предположим теперь, что в T любые две вершины смежные, т. е. $\langle T \rangle = K_7$. Одна из вершин v_1, v_2, v_3 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя эти вершины с несмежными им вершинами множества T из (1) получаем 8-хроматическое разложение графа G и согласно лемме 1 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Аналогично следует, что одна из вершин v_4, v_5, v_6 тоже смежна всем вершинам множества T . Сделанные рассуждения дают нам право предположить, что $v_1 \in \text{Ad}(T)$ и $v_4 \in \text{Ad}(T)$. Так как $\langle T \rangle = K_7$ и $\text{cl}(G) < 9$, то $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Если $[v_1, v_5] \notin E(G)$ и $[v_1, v_6] \notin E(G)$, тогда $\text{Ad}(v_1) \subseteq \text{Ad}(v_4)$. Если $[v_2, v_4] \notin E(G)$ и $[v_3, v_4] \notin E(G)$, тогда $\text{Ad}(v_4) \subseteq \text{Ad}(v_1)$. В этом и в другом случае, согласно лемме 5, G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. И так, имеем право предположить, что $[v_1, v_5] \in E(G)$ и $[v_2, v_4] \in E(G)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_7$ следует $v_2 \notin \text{Ad}(T)$ и $v_5 \notin \text{Ad}(T)$. Для вершин v_2 и v_5 представляются следующие две возможности:

Подслучай 1.а. В T нет вершины несмежной одновременно v_2 и v_5 . Без ограничения общности можно предположить $[v_2, v_7] \notin E(G)$,

$[v_5, v_7] \in E(G)$ и $[v_5, v_8] \notin E(G)$, $[v_2, v_8] \in E(G)$. Если $[v_6, v_7] \in E(G)$ тогда $\text{Ad}(v_2) \subseteq \text{Ad}(v_7)$, а если $[v_3, v_8] \in E(G)$, то $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$. В том и в другом случае, согласно лемме 5, G не является (3, 4)-графом Рамсея. Следовательно, можно предположить, что $[v_6, v_7] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Но из этого вытекает, что первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

Подслучай 1.б. В T есть вершина несмежная v_2 и v_5 . Пусть например $[v_2, v_7] \notin E(G)$ и $[v_5, v_7] \notin E(G)$. Для пар $[v_3, v_7]$ и $[v_6, v_7]$ представляются следующие возможности:

I. $[v_3, v_7] \notin E(G)$ и $[v_6, v_7] \notin E(G)$. В этой ситуации первые три подмножества разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_3, v_6 смежна вершине v_7 , а другая — нет. Пусть например $[v_6, v_7] \in E(G)$ и $[v_3, v_7] \notin E(G)$. Если v_6 несмежна некоторой из вершин v_8, \dots, v_{13} , например $[v_6, v_8] \notin E(G)$, тогда первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик и согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея. В противном случае $v_6 \in \text{Ad}(T)$. Из $\langle T \rangle = K_7$ и $\text{cl}(G) < 9$ вытекает $[v_1, v_6] \notin E(G)$. Но тогда первые три подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 граф G не является (3, 4)-графом Рамсея.

III. $[v_3, v_7] \in E(G)$ и $[v_6, v_7] \in E(G)$. Если v_3 и v_6 несмежны одновременно некоторой из вершин v_8, \dots, v_{13} , например v_8 , тогда первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если v_3 и v_6 несмежны разным вершинам множества v_8, \dots, v_{13} , например $[v_3, v_8] \notin E(G)$ и $[v_6, v_9] \notin E(G)$ тогда из разложение (1) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \{v_6, v_9\} \cup \dots$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если одна из вершин v_3, v_6 принадлежит $\text{Ad}(T)$, а другая — нет, например $v_6 \in \text{Ad}(T)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$, тогда из разложения (1) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \dots$$

Из $v_6 \in \text{Ad}(T)$ и $\text{cl}(G) < 9$ вытекает $[v_1, v_6] \notin E(G)$ и значит первые три подмножества этого 9-хроматического разложения порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Остается рассмотреть ситуацию когда $v_3, v_6 \in \text{Ad}(T)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_7$ следует, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ — независимое множество. Но тогда, первые три подмножества разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

С л у ч а й 2. $\alpha(\langle v_4, \dots, v_{13} \rangle) = 2$. Согласно лемме 6, можно предположить, что $[v_4, v_5] \notin E(G)$ и $[v_6, v_7] \notin E(G)$. Тогда

$$(2) \quad V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \dots \cup \{v_{13}\}$$

является 9-хроматическим разложением графа G . Положим $T = \{v_8, \dots, v_{13}\}$. Если в T есть две несмежные вершины, тогда группируя эти две вершины, из (2) получаем 8-хроматическое разложение. Согласно лемме 1 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $\langle T \rangle = K_6$. Хотя бы одна из вершин v_1, v_2, v_3 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя v_1, v_2, v_3 с несмежными им вершинами множества T получим 8-хроматическое разложение графа G). Из аналогичных рассуждений вытекает, что хотя бы одна из вершин v_4, v_5 принадлежит $\text{Ad}(T)$ и что хотя бы одна из вершин v_6, v_7 принадлежит $\text{Ad}(T)$. Эти рассуждения дают нам право предположить, что $v_1 \in \text{Ad}(T)$, $v_4 \in \text{Ad}(T)$, $v_6 \in \text{Ad}(T)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что $\langle v_1, v_4, v_6 \rangle$ не является 3-кликой.

П о д с л у ч а й 2.а. В T есть вершина, например v_8 , которая несмежна вершинам v_5 и v_7 . Для вершин v_2 и v_3 есть следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Так как $\langle v_1, v_4, v_6 \rangle$ не является 3-кликой, то в этой ситуации первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна вершине v_8 а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если вершина v_3 несмежна некоторой из вершин v_9, \dots, v_{13} , например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если $v_3 \in \text{Ad}(T)$ тогда из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ вытекает, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ не содержит 3-клик. Это означает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

III. Вершина v_8 смежна вершинам v_2 и v_3 . Если $v_2 \in \text{Ad}(T)$ и $v_3 \in \text{Ad}(T)$, тогда из $\langle T \rangle = K_6$ и $\text{cl}(G) < 9$ следует, что $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_6 \rangle$ не содержит 3-клик и значит, первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если $v_2 \in \text{Ad}(T)$, $v_3 \notin \text{Ad}(T)$ и например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из разложения (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик, так как из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что $\{v_1, v_2, v_4, v_6\}$ не содержит 3-клик. Если $v_2 \notin \text{Ad}(T)$ и $v_3 \notin \text{Ad}(T)$, тогда группируя эти вершины с

несмежными им вершинам множества $\{v_9, \dots, v_{13}\}$ из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

Подслучай 2.б. Вершины v_5 и v_7 несмежны разным вершинам множества T . Пусть например $[v_5, v_8] \notin E(G)$ и $[v_7, v_9] \notin E(G)$. Можно предположить, что $[v_5, v_9] \in E(G)$ и $[v_7, v_8] \in E(G)$ (иначе попадаем в условия подслучая 2.а.). Если $[v_4, v_6] \notin E(G)$, тогда $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ не содержит 4-клик, т. е. 9-хроматическое разложение (2) удовлетворяет условиям леммы 3 и значит G не является (3, 4)-графом Рамсея. Предположим, что $[v_4, v_6] \in E(G)$. Заметим, что либо $[v_1, v_6] \notin E(G)$, либо $[v_1, v_4] \notin E(G)$ (иначе $\text{cl}(G) \geq 9$). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Для вершин v_2 и v_3 представляются следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Вершина v_8 вместе с первыми двумя подмножествами 9-хроматического разложения (2) порождает подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна вершине v_8 , а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если v_3 несмежна некоторой вершине множества $\{v_9, \dots, v_{13}\}$, тогда группируя v_3 с несмежной ей вершине этого множества из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots$$

в котором $\langle v_1, v_2, v_4, v_5, v_8 \rangle$ не содержит 3-клик и согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если $v_3 \in \text{Ad}(T)$, тогда либо $[v_3, v_4] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_6] \notin E(G)$ (иначе $\text{cl}(G) \geq 9$). Предположим, что $[v_3, v_4] \notin E(G)$. В этой ситуации вершина v_8 с первыми двумя подмножествами разложения (2) порождает подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если $[v_3, v_6] \notin E(G)$, тогда из разложения (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_6\} \cup \{v_7, v_9\} \cup \dots$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

III. $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Очевидно в этом случае $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$ и согласно лемме 5 G не является (3, 4)-графом Рамсея.

Подслучай 2.в. Одна из вершин v_5, v_7 принадлежит $\text{Ad}(T)$, а другая — нет. Пусть например $v_7 \in \text{Ad}(T)$ и $[v_5, v_8] \notin E(G)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что $\langle v_1, v_4, v_6, v_7 \rangle$ не содержит 3-клик. Если $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$, тогда $\text{Ad}(v_5) \subseteq \text{Ad}(v_8)$ и согласно лемме 5 G не является (3, 4)-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $[v_2, v_8] \notin E(G)$. Если еще $[v_3, v_8] \notin E(G)$, тогда первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик (иначе $\langle v_1, v_4, v_6, v_7 \rangle$ содержит 3-клику и

следует $cl(G) \geq 9$). Согласно лемме 3 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Если $[v_3, v_8] \in E(G)$ и $v_3 \notin Ad(T)$, например $[v_3, v_3] \notin E(G)$, тогда из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Если $v_3 \in Ad(T)$ тогда из $cl(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\}$ не содержит 3-клик. Это означает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

П о д с л у ч а й 2.г. $v_5 \in Ad(T)$ и $v_7 \in Ad(T)$. Если $v_2 \notin Ad(T)$ и например $[v_2, v_8] \notin E(G)$, тогда $Ad(v_2) \subseteq Ad(v_8)$ и согласно лемме 5 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Следовательно можно предположить, что $v_2 \in Ad(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще что $v_3 \in Ad(T)$. Из $cl(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что подграф $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ не содержит 3-клик. Это означает, что разложение (2) удовлетворяет условиям леммы 2 и значит G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Согласно лемме 8 имеем $\alpha(G) = 2$. Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_{13}\}$. Согласно лемме 7 можно предположить, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$, $[v_3, v_4] \notin E(G)$, $[v_5, v_6] \notin E(G)$, $[v_7, v_8] \notin E(G)$. Тогда

$$(3) \quad \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \dots \cup \{v_{13}\}$$

является 9-хроматическим разложением графа G . Положим $T = \{v_9, \dots, v_{13}\}$. Если $\langle T \rangle \neq K_5$, тогда группируя две несмежные вершины множества T из (3) получаем 8-хроматическое разложение графа G . Согласно лемме 1 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Поэтому предположим, что $\langle T \rangle = K_5$. Если $v_1 \notin Ad(T)$ и $v_2 \notin Ad(T)$, тогда группируя вершины v_1 и v_2 с несмежными им вершинами множества T из (3) получаем 8-хроматическое разложение графа G и согласно лемме 1 он не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Поэтому предположим, что $v_1 \in Ad(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще $v_3 \in Ad(T)$, $v_5 \in Ad(T)$, $v_7 \in Ad(T)$. Для вершин v_2, v_4, v_6, v_8 возникают следующие возможности:

С л у ч а й 1. $v_2, v_4, v_6, v_8 \in Ad(T)$. В этом случае из $cl(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_5$ вытекает, что $\{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ не содержит 4-клик. Это означает, что разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3 и значит G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

С л у ч а й 2. Три из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $Ad(T)$, а четвертая — нет. Пусть например $v_4, v_6, v_8 \in Ad(T)$ и $[v_2, v_9] \notin E(G)$. В этом случае $Ad(v_2) \subseteq Ad(v_9)$ и согласно лемме 5 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

С л у ч а й 3. Любая из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 не принадлежит $\text{Ad}(T)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_5$ следует, что $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ не является 4-кликой. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Если вершины v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T , например вершине v_9 , тогда подграф $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9 \rangle$ не содержит 3-клик и разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Если вершины v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T , например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда подграф $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10} \rangle$ не содержит 4-клик и значит разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

С л у ч а й 4. Ровно три из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 не принадлежат $\text{Ad}(T)$. Пусть например $v_8 \in \text{Ad}(T)$ и $v_2, v_4, v_6 \notin \text{Ad}(T)$. Предположим, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Если v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T , например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$ тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9 \rangle$ не содержит 3-клик. Разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 2 и значит G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Если v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T , например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10} \rangle$ не содержит 4-клик, т. е. разложение (3) удовлетворяет леммы 3. Следовательно G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. И так, мы доказали, что $[v_1, v_3] \in E(G)$. Аналогичным образом доказывается, что $[v_1, v_5] \in E(G)$ и $[v_3, v_5] \in E(G)$. Из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_5$ вытекает, что $v_7 \notin \text{Ad}(v_1, v_3, v_5)$ и $v_8 \notin \text{Ad}(v_1, v_3, v_5)$. Вершины v_7 и v_8 несмежны разным вершинам 3-клики $\{v_1, v_3, v_5\}$, так как иначе $\alpha(G) \geq 3$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_7] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Если v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T , например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$ тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9 \rangle$ не содержит 4-клик и разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. Если v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T , например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда из (3) получаем следующее 8-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_{11}\} \cup \{v_{12}\} \cup \{v_{13}\}$$

Согласно лемме 1 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

С л у ч а й 5. Две из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\text{Ad}(T)$, а другие две — нет. Пусть например $v_6 \in \text{Ad}(T)$, $v_8 \in \text{Ad}(T)$ и $v_2 \notin \text{Ad}(T)$, $v_4 \notin \text{Ad}(T)$. В этой ситуации из $\text{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_5$ следует, что $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle$ не содержит 4-клик. Покажем, что из этого следует, что вершины v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T . Допустим, что это неверно и пусть например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$. Тогда из (3) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3, 4)$ -графом Рамсея. И так, можно

предположить, что $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$. Из этого следует, что $\text{cl}(\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_9 \rangle) = 4$ (иначе разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3). Это означает, что либо $\{v_1, v_3, v_5\}$, либо $\{v_1, v_3, v_6\}$ является 3-кликкой. Без ограничения общности можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_5\}$ является 3-кликкой. Из аналогичных соображений можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_7\}$ тоже является 3-кликкой графа G . Но тогда $[v_5, v_7] \notin E(G)$, так как иначе вершины v_1, v_3, v_5, v_7 вместе с T составляют 9-кликку графа G , что противоречит условию $\text{cl}(G) < 9$. Из $\alpha(G) = 2$ следует $[v_5, v_8] \in E(G)$ и $[v_6, v_7] \in E(G)$. Так как $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$ не является 4-кликкой (иначе $\text{cl}(G) \geq 9$), то либо $[v_1, v_6] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_6] \notin E(G)$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_6] \notin E(G)$. Множество $\{v_1, v_3, v_5, v_8\}$ тоже не является 4-кликкой (иначе $\text{cl}(G) \geq 9$). Из этого следует, что $[v_1, v_8] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Если $[v_1, v_8] \notin E(G)$, тогда подграф $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ не содержит 4-клик и значит 9-хроматическое разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. И так, можно предположить, что $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Из сделанных рассуждений вытекает, что $v_1, v_2, v_9, v_4, v_3, v_8, v_7, v_5, v_6, v_1$ является простым циклом в дополнении \overline{G} графа G . Этим доказано, что $G \subseteq K_4 + \overline{C}_9$. Осталось показать, что $K_4 + \overline{C}_9$ не является $(3, 4)$ -графом Рамсея.

Положим $V(\overline{C}_9) = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ и $V(K_4) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа $K_4 + \overline{C}_9$: ребро $[v_i, v_j] \in E_1$, если на рис. 1 оно пунктирное и $[v_i, v_j] \in E_2$ — если оно плотное; ребро $[w_i, w_j] \in E_1$, если на рис. 2 оно пунктирное и $[w_i, w_j] \in E_2$ — если оно плотное; раскрашивание ребер $[v_i, w_j]$, $i = 1, 2, \dots, 9$, $j = 1, 2, 3, 4$ задается

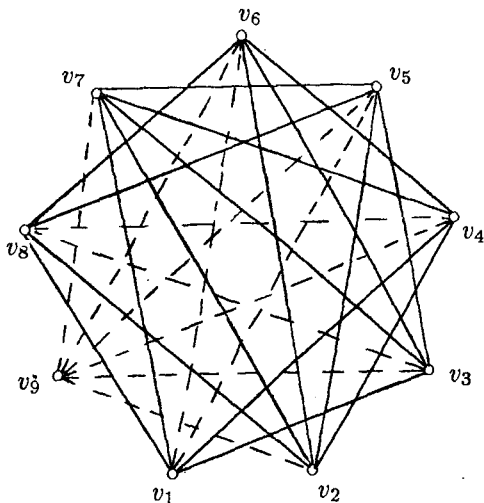


Рис. 1

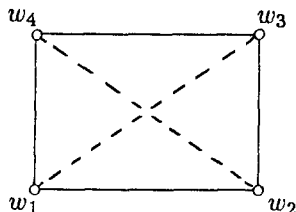


Рис. 2

при помощи следующей матрицы $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

если $a_{ij} = 1$, тогда $[v_i, w_j] \in E_1$, а если $a_{ij} = 2$, тогда $[v_i, w_j] \in E_2$. В полученной 2-раскраске $E_1 \cup E_2$ ребер графа $K_4 + \overline{C}_9$ нет 3-клики все ребра которой принадлежат E_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E_2 . Этим доказано, что граф $K_4 + \overline{C}_9$ не является (3, 4)-графом Рамсея.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е н о в, Н. Графи на Рамзи и някои константи свързани с тях. Дисертация, Соф. унив., 1980.
2. Н е н о в, Н. О (3, 4)-графах Рамсея. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 73, 1979, 185–190.
3. Н е н о в, Н. Об одной константе, связанной с (3, 4)-графами Рамсея. — Сердика, 7, 1981, 336–371.
4. Green wood, R., A. Gleason. Combinational relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., 7, 1955, 1–5.
5. Lin, S. On Ramsey numbers and K_r -colouring of graphs. — J. Comb. Theory, Ser. B, 12, 1972, 82–92.

Поступила 12.02.1992

FACTORIZATIONS OF THE GROUPS OF LIE TYPE OF LIE RANK THREE OVER FIELDS OF 2 OR 3 ELEMENTS

TSANKO GENTCHEV, KEROPE TCHAKERIAN

Цанко Генчев, Керопе Чахърян. ФАКТОРИЗАЦИИ ГРУПП ТИПА ЛИ ЛИЕВСКОГО РАНГА 3 НАД ПОЛЯМИ ИЗ ДВУХ ИЛИ ТРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ

Доказан следующий результат.

Пусть G — группа типа Ли лиевского ранга 3 над полем из двух или трех элементов. Предположим, что $G = AB$, где A и B — собственные неабелевы простые подгруппы G . Тогда имеет место одно из следующих:

- 1) $G = L_4(2)$, $A \cong L_3(2)$, $B \cong A_6$ или A_7 ;
- 2) $G = L_4(3)$, $A \cong L_3(3)$, $B \cong S_4(3)$;
- 3) $G = S_6(2)$, $A \cong L_4(2)$, $B \cong L_2(8)$, или $A \cong U_4(2)$, $B \cong L_2(8)$ или $U_3(3)$;
- 4) $G = U_6(2)$, $A \cong U_5(2)$, $B \cong S_6(2)$, $U_4(3)$ или M_{22} ;
- 5) $G = U_6(3)$, $A \cong U_5(3)$, $B \cong S_6(3)$;
- 6) $G = O_7(3)$, $A \cong L_4(3)$, $B \cong U_3(3)$, $G_2(3)$, $S_6(2)$ или A_9 , или $A \cong G_2(3)$, $B \cong S_4(3)$, $S_6(2)$ или A_9 .

Tsanko Gentchev, Kerope Tchakerian. FACTORIZATIONS OF THE GROUPS OF LIE TYPE OF LIE RANK THREE OVER FIELDS OF 2 OR 3 ELEMENTS

The following result is proved.

Let G be a group of Lie type of Lie rank three over a field of 2 or 3 elements. Suppose that $G = AB$, where A , B are proper non-Abelian simple subgroups of G . Then one of the following holds:

- 1) $G = L_4(2)$, $A \cong L_3(2)$, $B \cong A_6$ or A_7 ;
- 2) $G = L_4(3)$, $A \cong L_3(3)$, $B \cong S_4(3)$;
- 3) $G = S_6(2)$, $A \cong L_4(2)$, $B \cong L_2(8)$, or $A \cong U_4(2)$, $B \cong L_2(8)$ or $U_3(3)$;
- 4) $G = U_6(2)$, $A \cong U_5(2)$, $B \cong S_6(2)$, $U_4(3)$ or M_{22} ;
- 5) $G = U_6(3)$, $A \cong U_5(3)$, $B \cong S_6(3)$;
- 6) $G = O_7(3)$, $A \cong L_4(3)$, $B \cong U_3(3)$, $G_2(3)$, $S_6(2)$ or A_9 , or $A \cong G_2(3)$, $B \cong S_4(3)$, $S_6(2)$ or A_9 .

1. INTRODUCTION

The factorizations (into the product of two simple groups) of all finite groups of Lie type of Lie rank one or two are known (see [3]). In this paper we prove the following

Theorem. Let G be a (finite, simple) group of Lie type of Lie rank three over a field of 2 or 3 elements. Suppose that $G = AB$, where A, B are proper non-Abelian simple subgroups of G . Then one of the following holds:

- 1) $G = L_4(2)$, $A \cong L_3(2)$, $B \cong A_6$ or A_7 ;
- 2) $G = L_4(3)$, $A \cong L_3(3)$, $B \cong S_4(3)$;
- 3) $G = S_6(2)$, $A \cong L_4(2)$, $B \cong L_2(8)$, or $A \cong U_4(2)$, $B \cong L_2(8)$ or $U_3(3)$;
- 4) $G = U_6(2)$, $A \cong U_5(2)$, $B \cong S_6(2)$, $U_4(3)$ or M_{22} ;
- 5) $G = U_6(3)$, $A \cong U_5(3)$, $B \cong S_6(3)$;
- 6) $G = O_7(3)$, $A \cong L_4(3)$, $B \cong U_3(3)$, $G_2(3)$, $S_6(2)$ or A_9 , or $A \cong G_2(3)$, $B \cong S_4(3)$, $S_6(2)$ or A_9 .

Our notation is standard (see [2]).

2. PROOFS

The groups of Lie type of Lie rank three over a field of 2 or 3 elements are $L_4(2)$, $L_4(3)$, $S_6(2)$, $S_6(3)$, $U_6(2)$, $U_6(3)$, $U_7(2)$, $U_7(3)$, $O_7(3)$, $O_8^-(2)$, $O_8^-(3)$. The factorizations of $L_4(2)$, $L_4(3)$, $S_6(2)$, and $O_8^-(2)$ are known (see [1], [4]); this yields 1)–3) of the theorem.

Let $G = S_6(3)$. As $3^9 \mid |G|$, we can assume that $3^5 \mid |A|$. However, $S_6(3)$ has no proper simple subgroup of such an order ([2]).

If $G = U_7(2)$, we can assume that $43 \mid |A|$ (and $|A| \mid |G|$). This leads to $A \cong L_2(43)$. Then $|G : A| = 2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5$ divides $|B|$ (and $|B| \mid |G|$). However, there is no such simple group B .

If $G = U_7(3)$, there is no simple group A with $547 \mid |A|$ and $|A| \mid |G|$.

Let $G = O_8^-(3)$. Assuming that $41 \mid |A|$, we have $A \cong L_2(41)$ or $L_2(81)$. Then $|B|$ is divisible by $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 13$ or $2^6 \cdot 3^8 \cdot 7 \cdot 13$, respectively. This yields $A \cong L_2(81)$, $B \cong S_6(3)$ or $O_7(3)$, and $|A \cap B| = 120$. But $L_2(81)$ has no subgroup of order 120.

Now we treat the remaining groups $U_6(2)$, $U_6(3)$, and $O_7(3)$.

$G = U_6(2)$ (order $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$). We use the character table and the maximal subgroup list of G [2]. The proper simple subgroups of G are A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , $L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(11)$, $L_3(4)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $S_6(2)$, M_{22} . This leads to the following possibilities: $A \cong S_6(2)$, $B \cong M_{22}$ and $A \cong U_5(2)$, $B \cong A_8$, $U_3(3)$, $L_3(4)$, $U_4(3)$, $S_6(2)$, or M_{22} . In the first case $|A \cap B| = 70$, hence $A \cap B$ has an element of order 35 which is impossible in M_{22} (as well as in $S_6(2)$).

Thus $A \cong U_5(2)$. If $B \cong A_8$ or $L_3(4)$, then $|A \cap B| = 30$, hence $A \cap B$ has an element of order 15. This contradicts the structure of $L_3(4)$, so $B \cong A_8$. Now $A \cap B$ contains an element t from the class (3A) of G , as the remaining elements of order 3 of G do not commute with elements of order 5. An inspection of the centralizers

of those elements of order 3 in A and B which commute with elements of order 5 implies $C_A(t) = C_G(t)$, $|C_B(t)| = 180$. Hence $|A \cap B| \geq 180$, a contradiction.

Let $B \cong U_3(3)$. Then $|A \cap B| = 9$. Any involution in $U_3(3)$ is a square (of an element of order 4) and the only involutions of G with this property are those in the classes (2A) and (2B). Thus B contains an element from (2A) or (2B). On the other hand, G has a single class of $U_5(2)$ subgroups and the permutation character of G on the cosets of such a subgroup implies that it contains involutions from both classes (2A) and (2B). It follows that $2 \mid |A \cap B|$, a contradiction.

Thus $A \cong U_5(2)$, $B \cong S_6(2)$, $U_4(3)$, or M_{22} and we reach 4) of the theorem.

The existence of the first factorization in 4) is known [4]. Next, take subgroups $A \cong U_5(2)$ and $B \cong M_{22}$ of G such that $11 \mid |A \cap B|$. In M_{22} , every proper subgroup of order divisible by 11 is contained in a (maximal) subgroup isomorphic to $L_2(11)$. Hence $|A \cap B| \leq |L_2(11)|$ which produces $|AB| \geq |G|$, i. e. $G = AB$ thus proving the third factorization in 4).

Lastly, let $A \cong U_5(2)$, $B \cong U_4(3)$ be subgroups of G and $C = A \cap B$. We can assume that $3^5 \mid |C|$, as B contains a Sylow 3-subgroup of G . Further, $|C| \geq |A||B|/|G| = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$ and $|C|$ divides $(|A|, |B|) = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$. Now the subgroup structure of $U_4(3)$ implies that C is contained in a (maximal) subgroup D of B which is isomorphic to a split extension of E_{81} by A_6 . Then $|D : C| = 3$ or 6. As D obviously has no subgroup of index 3, it follows that $|C| = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$, whence $G = AB$ and the second factorization in 4) is proved.

$G = U_6(3)$ (order $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 61$). Checking the known simple groups A with $61 \mid |A|$ and $|A| \mid |G|$, we conclude that $A \cong U_5(3)$. Then $|G : A| \mid |B|$ and $|B| \mid |G|$ imply $B \cong L_3(9)$, $S_6(3)$, $G_2(3)$, or $O_7(3)$. However, G has no $G_2(3)$ subgroups and hence (as $O_7(3)$ contains $G_2(3)$) no $O_7(3)$ subgroups. Indeed, if $U_6(3)$ contains $G_2(3)$ then $G_2(3)$ must embed into $SU_6(9)$, as $G_2(3)$ has a Schur multiplier of odd order. But $G_2(3)$ has 2-rank three and a single class of involutions, i. e. it has an E_8 subgroup all of whose involutions are conjugate. This is impossible in $SL_6(9)$ by [4], Lemma 4.3. Thus $B \cong L_3(9)$ or $S_6(3)$. Suppose $B \cong L_3(9)$. Each of the groups $U_5(3)$ and $L_3(9)$ has $GL_2(9)$ subgroups, so has an $SL_2(9)$ subgroup centralized by some element of order 8. On the other hand, as shown below, G has a single conjugacy class of $SL_2(9)$ subgroups with this property. It follows that $A \cap B$ contains an $SL_2(9)$ subgroup which contradicts (by order considerations) the assumption $G = AB$. Thus $A \cong U_5(3)$, $B \cong S_6(3)$ and we reach 5) of the theorem; the factorization is known [4].

Now we proceed to prove the claim that G has exactly one conjugacy class of $SL_2(9)$ subgroups centralized by elements of order 8. We use the bar convention to denote homomorphic images of elements and subgroups of

$$SU_6(9) = \left\{ x \in GL_6(9) \mid x^{*t} x = E, \det x = 1 \right\}$$

in $G = SU_6(9)/\langle -E \rangle$; here, E is the identity matrix and x^{*t} denotes the transpose of the matrix x^* whose entries are the cubes of the entries of a matrix x . Let ω be

a generator of the multiplicative group of $GF(9)$, $\omega^2 = \omega + 1$, and

$$I = \begin{pmatrix} & & \omega^2 & \omega^2 \\ & & -\omega^2 & \\ -\omega^2 & & & \\ & -\omega^2 & & \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 1 & \omega^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

If $X, Y \in GL_4(9)$ and $X = T^{-1}YT$ then $X^{*^t}X = E$ if and only if $Y^{*^t}IY = Y$. Let

$$z = \begin{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} U & \\ & U^* \end{pmatrix} T \\ E \end{pmatrix}, \quad \text{where } U = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^{-1} & \omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

Then \bar{z} is a representative of the single conjugacy class of elements of order 5 in G . Furthermore, $C_G(\bar{z}) = \bar{C}$, where

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} UV & \\ & -\omega U^* V^* \end{pmatrix}^k T \\ S \end{pmatrix} \mid 1 \leq k \leq 80, S \in GL_2(9), \right. \\ \left. S^{*^t} S = E, \det S = \omega^{2k} \right\},$$

$V = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. All the elements \bar{y} of order 8 in $C_G(\bar{z})$ are given by

$$y = \begin{pmatrix} W^l & \\ & S \end{pmatrix}, \quad W = T^{-1} \begin{pmatrix} -\omega & & \\ & -\omega & \\ & & \omega \\ & & & \omega \end{pmatrix} T, \quad l = 1, 3, 5, \text{ or } 7,$$

$$S = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \omega^2 & \\ & \pm \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ & \end{pmatrix}, \text{ or } \begin{pmatrix} \mp \omega^2 & \pm \omega^2 \\ & \end{pmatrix}.$$

An appropriate conjugation in $C_G(\bar{z})$ implies that every cyclic subgroup of order 8 of $C_G(\bar{z})$ is conjugate to $\langle \bar{y}_1 \rangle$ or $\langle \bar{y}_2 \rangle$, where

$$y_1 = \begin{pmatrix} W & & \\ & \pm 1 & \\ & & \mp 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} W & & \\ & \pm \omega^2 & \\ & & \pm \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Next, $C_G(\bar{y}_1) = \bar{C}_1$ and $C_G(\bar{y}_2) = \bar{C}_2$, where

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} A & \\ & \Delta^{-3} A^* \end{pmatrix} T & & \\ & a & \\ & & a^{-1} \Delta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \Delta^{-3} A^* & A \end{pmatrix} T & & \\ & & a & \\ & & & -a^{-1} \Delta^2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \left. A \in GL_2(9), \Delta = \det A, a \in GF(9), a^4 = 1 \right\},$$

$$C_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} T^{-1} \begin{pmatrix} A & \\ & \Delta^{-3} A^* \end{pmatrix} T & \\ \hline & B \end{array} \right) \mid A, B \in GL_2(9), \right. \\ \left. \Delta = \det A, B^*{}^t B = E, \det B = \Delta^2 \right\}.$$

Hence $|C_G(\bar{y}_1)| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$, $|C_G(\bar{y}_2)| = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5$. Let

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} T^{-1} \begin{pmatrix} A & \\ & A^* \end{pmatrix} T & \\ \hline & E \end{array} \right) \mid A \in SL_2(9) \right\}.$$

Then $\bar{L} \cong L \cong SL_2(9)$ and \bar{L} is a normal subgroup of both $C_G(\bar{y}_1)$, $C_G(\bar{y}_2)$. If \bar{L}_i is another $SL_2(9)$ subgroup in $C_G(\bar{y}_i)$ then $\bar{L} \cap \bar{L}_i$ is a proper normal subgroup of \bar{L}_i of order at least $2^3 \cdot 3^{2-i}$ ($i = 1, 2$) which is, of course, impossible. Thus \bar{L} is the unique $SL_2(9)$ subgroup in each of $C_G(\bar{y}_1)$ and $C_G(\bar{y}_2)$.

Now let $H \cong SL_2(9)$ be an arbitrary subgroup of G centralized by some element \bar{y} of order 8. We can assume, up to conjugacy, that $\bar{z} \in H$ whence $\bar{y} \in C_G(\bar{z})$. Then $\langle \bar{y} \rangle$ is conjugate to $\langle \bar{y}_1 \rangle$ or $\langle \bar{y}_2 \rangle$, so H is conjugate to an $SL_2(9)$ subgroup of $C_G(\bar{y}_1)$ or $C_G(\bar{y}_2)$, i. e. H is conjugate to the subgroup \bar{L} . This proves the claim.

$G = O_7(3)$ (order $2^9 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$). We use the information in [2]. The proper simple subgroups of G are A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , A_9 , $L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(13)$, $L_3(3)$, $L_4(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$, $G_2(3)$, and $S_6(2)$. This leads exactly to the possibilities listed in 6) of the theorem.

Now we proceed to prove the existence of these seven factorizations.

Let $A \cong L_4(3)$, $B \cong G_2(3)$ be subgroups of G . We can assume that $13 \mid |A \cap B|$. Now $A \cap B$ is a proper subgroup of both A , B of order at least $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$. The subgroup structure of $L_4(3)$ implies that $A \cap B$ is contained in a subgroup of A isomorphic to a split extension of E_{27} by $L_3(3)$ while the structure of $G_2(3)$ implies that $A \cap B$ is contained in a subgroup of B isomorphic to a split extension of $L_3(3)$ by C_2 . It follows that $A \cap B \cong L_3(3)$. This produces $G = AB$.

Furthermore, it is known that $L_4(3) = L_3(3)S_4(3)$ (see [4]). As $L_4(3)$ has a single conjugacy class of $L_3(3)$ subgroups, it follows that there is a subgroup $C \cong S_4(3)$ of A such that $A = (A \cap B)C$. Then $|(A \cap B) \cap C| = 24$, i. e. $|B \cap C| = 24$ which produces $G = BC$.

Similarly, it is known that $G_2(3) = L_3(3)U_3(3)$ (see [4]). As $G_2(3)$ has two conjugacy classes of $L_3(3)$ subgroups which are interchanged by an outer automorphism of $G_2(3)$, it follows that there is a subgroup $D \cong U_3(3)$ of B such that $B = (A \cap B)D$. This yields $|A \cap D| = 8$ whence $G = AD$.

Next, let $F \cong S_6(2)$ be a subgroup of G . The permutation character of G on the cosets of F shows that the three conjugacy classes of elements of order 3 of F are contained in three distinct conjugacy classes of G . Hence any two elements of order 3 of F which are conjugate in G are conjugate also in F .

Now $|A \cap F|$ divides $(|A|, |F|) = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$. Suppose that $9 \mid |A \cap F|$. The relevant permutation characters imply that the only common nonidentity 3-elements of A

and F are from the class $(3B)$ of G . Then $A \cap F$ contains an E_9 subgroup all of whose nonidentity elements are from $(3B)$ and hence (by the above paragraph) are conjugate in F . However, $S_6(2)$ has no such E_9 subgroup (by the irreducible character of degree 7 of $S_6(2)$). Thus $9 \nmid |A \cap F|$ whence $|A \cap F| \mid 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. This yields $G = AF$.

Similarly, we can choose subgroups $B \cong G_2(3)$ and $F \cong S_6(2)$ of G such that the only common nonidentity 3-elements of B and F are from the class $(3F)$ of G . Then (just as above) $9 \nmid |B \cap F|$. As $|B \cap F| \mid 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7$, it follows that $|B \cap F| \mid 2^6 \cdot 3 \cdot 7$. This yields $G = BF$.

The group G has two conjugacy classes of subgroups $H \cong A_9$. Using various arguments, it is not difficult to determine the class structure of H in G for elements of order 2 and 3 (notation for the classes of H is as in [2], p. 37):

Class in H	$(2A)'$	$(2B)'$	$(3A)'$	$(3B)'$	$(3C)'$
Class in G	$(2B)$	$(2C)$	$(3B)$	$(3D)$ or $(3E)$	$(3F)$.

Now let $A \cong L_4(3)$, $H \cong A_9$ be subgroups of G . Then $|A \cap H| \geq 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ and $|A \cap H| \mid 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. The above paragraph and the permutation character of G on A imply that the only common elements of order 3 of A and H are from the class $(3B)$. Suppose that $9 \mid |A \cap H|$. As the elements of $(3B)$ are not cubes in G , it follows that $A \cap H$ contains an E_9 subgroup all of whose nonidentity elements are from $(3B)$. This is, however, impossible, as H has no E_9 subgroup with nonidentity elements from the class $(3A)'$ only. Thus $|A \cap H| \mid 2^6 \cdot 3 \cdot 5$. The subgroup structure of A_9 implies that $|A \cap H| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ or $2^5 \cdot 3 \cdot 5$. In the latter case, $A \cap H$ is contained in a subgroup of H isomorphic to a split extension of $A_5 \times A_4$ by C_2 and then it is easy to see that $A \cap H$ must intersect this $A_5 \times A_4$ in an $A_5 \times E_4$ subgroup. However, this contradicts the structure of A as the elements of order 5 in $L_4(3)$ are not centralized by E_4 subgroups. Thus $|A \cap H| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ whence $G = AH$.

Lastly, we can choose subgroups $B \cong G_2(3)$ and $H \cong A_9$ of G such that the only common elements of order 3 of B and H are from the class $(3F)$ of G . Then (as in the above paragraph) $9 \nmid |B \cap H|$, as H has no E_9 subgroup with nonidentity elements from the class $(3C)'$ only. Further, all the involutions of B are from the class $(2C)$ while H has no subgroup of order 16 containing involutions from the class $(2B)'$ only (by the irreducible character of A_9 of degree 8). Hence $16 \nmid |B \cap H|$. It follows that $|B \cap H| \mid 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ which leads to $G = BH$.

This completes the proof of the theorem.

REFERENCES

1. Alnader, N., K. Tchakerian. Factorizations of finite simple groups. — Ann. Univ. Sofia, **79**, 1985, 357–364.
2. Conway, J., R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson. Atlas of Finite Groups. Oxford, 1985.
3. Ganchev, Ts. Factorizations of the groups of Lie type of Lie rank 1 or 2. — Arch. Math., **47**, 1986, 493–499.
4. Preiser, U. Factorizations of finite groups. — Math. Zeit., **185**, 1984, 373–402.

Received 18.06.1992

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ*

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Иванка Иванова-Каратопраклиева. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ

Исследованы бесконечно малые изгибания первого порядка трех семейств поверхностей вращения — S_λ^2 , S_λ^1 и S_λ^0 (λ — параметр), знакопеременной гауссовой кривизны. Поверхности S_λ^2 являются двухсвязными, S_λ^1 — односвязными, S_λ^0 — замкнутыми, и не имеют внутренних асимптотических параллелей. Край поверхностей составлен из асимптотических параллелей, а полюса поверхностей являются гладкими — непараболическими или параболическими, или коническими точками. Доказано, что в S_λ^2 (S_λ^1 , S_λ^0) существует счетное множество нежестких поверхностей.

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva. INFINITESIMAL BENDINGS OF SOME CLASSES OF ROTATIONAL SURFACES WITH MIXED CURVATURE

The infinitesimal bendings of first order of three families of rotational surfaces S_λ^2 , S_λ^1 and S_λ^0 (λ is a parameter), with a mixed Gaussian curvature are investigated. The surfaces S_λ^2 are doubly connected, S_λ^1 — simply connected, S_λ^0 — closed, and they haven't any inner asymptotic parallels. The boundary of the surfaces consists of asymptotic parallels and their poles are smooth — nonparabolic or parabolic, or conic points. It is proved that a countable set of nonrigid surfaces exists in S_λ^2 (S_λ^1 , S_λ^0).

* Эта работа частично финансирована Министерством науки и образования по договору ММ—18, 1991.

1. В этой статье исследуем бесконечно малые (б.м.) изгибания трех однопараметрических семейств регулярных поверхностей вращения знакопеременной гауссовой кривизны — семейство двухсвязных поверхностей S_λ^2 , семейство односвязных поверхностей S_λ^1 и семейство замкнутых поверхностей S_λ^0 . Край рассматриваемых поверхностей составлен из асимптотических параллелей (параболические параллели 2-го и 3-го рода [1]), а полюса поверхностей могут быть как гладкими (параболическими или непараболическими), так и коническими.

Хорошо известно, что замкнутая выпуклая поверхность, как и выпуклая поверхность с краем, составленным из асимптотических линий, является жесткой (см. например [2], [6]). Для невыпуклых поверхностей это не так (полную библиографию об этом можно найти в [3], [5], [7]). Здесь доказываем при помощи метода Кон-Фоссена [1] (см. также [7]), что в любом из трех семействах — S_λ^2 , S_λ^1 и S_λ^0 , существует счетное множество нежестких первого порядка поверхностей.

2. Пусть в плоскости Ouy дана кривая

$$c_\lambda : y = r_\lambda(u), \quad r_\lambda(u) = \lambda u^{m_1}(u_0 - u)^{m_2} + \varphi(u), \quad \varphi(u) \geq 0,$$

$$(1) \quad r_\lambda(u) > 0 \text{ в } (0, u_0), \quad r_\lambda(u) \in C[0, u_0] \cap C^2(0, u_0),$$

$$\lambda = \text{const}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad 1 \geq m_1, m_2 \geq 0.$$

Пусть c_λ имеет непрерывную кривизну в $[0, u_0]$ и конечное число точек перегиба u_1, \dots, u_p , $0 < u_1 < \dots < u_p < u_0$, $p \geq 1$, отделяющие интервалы выпуклости вверх, где $r_\lambda''(u) \leq 0$, от интервалов выпуклости вниз, где $r_\lambda''(u) > 0$.

Дополнительно предположим, что c_λ имеет в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) представление

$$(2) \quad u = (y - r_0)^n f_1(y), \quad f_1(r_0) \neq 0, \quad f_1(y) \in C^A[r_0, r_0 + \varepsilon], \quad r_0 = \text{const} \geq 0$$

$$\text{(соответственно } u = (y - \bar{r}_0)^{n'} f_2(y) + u_0, \quad f_2(\bar{r}_0) \neq 0, \quad f_2(y) \in C^A[\bar{r}_0, \bar{r}_0 + \varepsilon], \\ \bar{r}_0 = \text{const} \geq 0).$$

Рассмотрим следующие типы поверхностей, полученных вращением кривой c_λ вокруг оси Ou :

(а) двусвязную поверхность, ограниченную двумя асимптотическими параллелями;

(б) односвязную поверхность с гладким или коническим полюсом и краем — асимптотической параллелью;

(в) замкнутую поверхность рода нуль, любой из двух полюсов которой может быть гладким или коническим.

Из этих предположений непосредственно следует, что : 1) $n \geq 2$, когда $u = 0$ (соответственно $n' \geq 2$, когда $u = u_0$) является гладким полюсом или асимптотической параллели; 2) $n = 1$, когда $u = 0$ (соответственно $n' = 1$, когда $u = u_0$) является коническим полюсом; 3) в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) c_λ имеет представление

$$(3) \quad r_\lambda(u) = u^{n_1} \varphi_1(u) + r_0, \quad \varphi_1(0) \neq 0$$

(соответственно $r_\lambda(u) = (u_0 - u)^{n_2} \varphi_2(u) + \bar{r}_0$, $\varphi_2(u_0) \neq 0$)

при этом $0 < n_1, n_2 \leq \frac{1}{2}$, когда $u = 0$ и $u = u_0$ являются гладкими полюсами или асимптотическими параллелями, и $n_1 = n_2 = 1$, когда $u = 0$ и $u = u_0$ — коническими полюсами; 4) если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) является полюсом поверхности, то $r_0 = 0$ (соответственно $\bar{r}_0 = 0$).

Отметим, что правые части равенства (2) и (3) зависят от параметра λ , но для простоты это явно не написано.

Напомним, что во всех рассматриваемых случаях (кроме случая конического полюса) касательная к c_λ в $u = 0$ и $u = u_0$ перпендикулярна оси вращения. При этом: если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) полюс, то при $n = 2$ (соответственно $n' = 2$) он является непараболической точкой поверхности, а при $n > 2$ (соответственно $n' > 2$) — параболической точкой поверхности, а следовательно и точки уплощения и $n - 2$ (соответственно $n' - 2$) — ее порядок уплощения; если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) параллель, то при $n = 2$ (соответственно $n' = 2$) она является параболической параллели второго рода, а при $n > 2$ (соответственно $n' > 2$) — параболической параллели третьего рода.

Наконец отметим, что если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) — конический полюс и в его окрестности функция $\frac{r_\lambda''(u)}{r_\lambda(u)}$ непрерывная, то предположение об аналитичности функции $f_1(y)$ (соответственно $f_2(y)$) можно снять (см. [4]).

Обозначим через S_λ^2 семейство двухсвязных (соответственно через S_λ^1 и S_λ^0 семейство односвязных и замкнутых) поверхностей вращения, которые получаются при вращении c_λ вокруг оси Ou , когда параметр λ меняется. Искомое поле б.м. изгибания 1-го порядка U будем предполагать вне полюсов класса C^1 и непрерывным на всей поверхности.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. В семействе двухсвязных поверхностей S_λ^2 , $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Теорема 2. В семействе односвязных поверхностей S_λ^1 , $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Теорема 3. В семействе замкнутых поверхностей S_λ^0 , $0 < \lambda < \infty$, существует счетное множество нежестких поверхностей.

Доказательство теорем 1–3. А. Представим радиус-вектор поверхности S_λ , полученной вращением кривой c_λ вокруг оси Ou , в виде [1]

$$x(u, v) = u.e + r_\lambda(u).a(v), \quad 0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

где e — единичный вектор оси Ou , а $a(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к Ou и повернутый на угол v от оси Oy . Пусть $U_k(u, v)$, $k \geq 2$, — фундаментальное поле б.м. изгибания первого порядка поверхности S_λ . Тогда [1]

$$U_k(u, v) = r^{ikv} [\varphi_k(u).e + \chi_k(u).a + \psi_k(u).a'] + e^{-ikv} [\bar{\varphi}_k(u).e + \bar{\chi}_k(u).a + \bar{\psi}_k(u).a'],$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi'_k(u) + r'_\lambda(u)\chi'_k(u) &= 0, \\ \chi_k(u) + ik\psi_k(u) &= 0, \\ ik\varphi_k(u) + r'_\lambda(u)[ik\chi_k(u) - \psi_k(u)] + r_\lambda(u)\psi'_k(u) &= 0, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Выключая $\psi_k(u)$ из (5), получаем

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi'_k(u) + r'_\lambda(u)\chi'_k(u) &= 0, \\ k^2\varphi_k(u) + (k^2 - 1)r'_\lambda(u)\chi_k(u) + r_\lambda(u)\chi'_k(u) &= 0, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

откуда видно, что функция $\chi_k(u) \in C^2(0, u_0)$ и следовательно поле $U_k(u, v)$ принадлежит классу C^2 вне $u = 0$ и $u = u_0$. Из (6) получаем для $\chi_k(u)$ уравнение

$$(7) \quad r_\lambda(u)\chi''_k(u) + (k^2 - 1)r'_\lambda(u)\chi_k(u) = 0, \quad k \geq 2.$$

Пользуясь представлением (2) меридиана c_λ в окрестности $u = 0$ и $u = u_0$, получаем уравнения

$$(5') \quad \begin{aligned} u'(y)\varphi'_k(y) + \chi'_k(y) &= 0, \\ \chi_k(y) + ik\psi_k(y) &= 0, \\ ik u'(y)\varphi_k(y) + ik\chi_k(y) - \psi_k(y) + y\psi'_k(y) &= 0, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

и

$$(7') \quad yu'(y)\chi''_k(y) - yu''(y)\chi'_k(y) - (k^2 - 1)u''(y)\chi_k(y) = 0, \quad k \geq 2.$$

Из (4) видно, что если $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) полюс поверхности, то фундаментальное поле $U_k(u, v)$ непрерывно в нем точно тогда, когда $\varphi_k(0) = \chi_k(0) = \psi_k(0) = 0$ (соответственно $\varphi_k(u_0) = \chi_k(u_0) = \psi_k(u_0) = 0$). В случае когда $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) асимптотическая параллель, из (2) и (5') видно, что

$$\begin{aligned} \chi_k(y)|_{y=r_0} = \chi'_k(y)|_{y=r_0} &= 0 \\ (\text{соответственно } \chi_k(y)|_{y=\bar{r}_0} = \chi'_k(y)|_{y=\bar{r}_0} &= 0). \end{aligned}$$

Известно, что каждый неравный тождественно нулю интеграл $\chi_k(u)$, $k \geq 2$, уравнения (7) дает нетривиальное поле б.м. изгиба поверхности [1]. Таким образом доказательство теорем 1-3 сводится к нахождению тех значения параметра λ , для которых уравнение (7) имеет по меньшей мере для одного целого числа $k \geq 2$ нетривиальное решение $\chi_k(u)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$(8) \quad \chi_k(0) = \chi_k(u_0) = 0.$$

Уравнение (7) имеет в $u = 0$ и $u = u_0$ особенность. Принимая y для независимой переменной в окрестности $u = 0$ и $u = u_0$ оно переходит в уравнению (7'). Если $u = 0$ полюс поверхности, то уравнение (7') является классом Фукса (см. например [8]) и имеет в окрестности $u = 0$ пару линейно независимых интегралов [4]

$$(9) \quad \begin{aligned} \chi_{k,1}(y) &= y^{\nu_k(n)+n-1} P_{k,1}(y), \\ \chi_{k,2}(y) &= y^{1-\nu_k(y)} \left[P_{k,2}(y) + A P_{k,1}(y) y^{2\nu_k(n)+n-2} \ln y \right], \end{aligned}$$

где $\nu_k(n) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{n^2 + 4(k^2 - 1)(n - 1)} + 2 - n \right]$, $A = \text{const}$ ($A = 0$, когда $2\nu_k + n - 2$ не целое число) функции $P_{k,1}(y)$ — аналитические и $P_{k,i}(0) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Установимся более подробно на случай когда $u = 0$ — асимптотическая параллель поверхности. В виду (2) уравнение (7') принимает вид

$$(10) \quad \chi_k''(y) - \frac{1}{y - r_0} \bar{A} \chi_k'(y) - \frac{1}{(y - r_0)^2} \bar{B} \chi_k(y) = 0,$$

где

$$\bar{A} = \frac{n(n-1)f_1 + 2n(y-r_0)f_1' + (y-r_0)^2 f_1''}{n f_1 + (y-r_0)f_1'}, \quad \bar{B} = \frac{(k^2-1)(y-r_0)}{y} \bar{A}.$$

Оно тоже является Фуксовым [8] и его характеристическое уравнение $\rho(\rho-1) + \rho a_0 + b_0 = 0$, $a_0 = 1 - n$, $b_0 = 0$, имеет корни $\rho_1 = n$, $\rho_2 = 0$. Следовательно в окрестности $u = 0$ уравнение (7') имеет пару линейно независимых интегралов

$$(11) \quad \begin{aligned} \chi_{k,1}(y) &= (y - r_0)^n P_{k,1}(y), \\ \chi_{k,2}(y) &= P_{k,2}(y) + A \chi_{k,1}(y) \ln(y - r_0), \end{aligned}$$

где $A = \text{const}$ ($A = 0$, когда n не целое число), функции $P_{k,i}(y)$ аналитические и $P_{k,i}(r_0) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Таким образом парой линейно независимых интегралов уравнения (7') в окрестности $u = 0$ являются функции (9), когда $u = 0$ полюс поверхности, и функции (11), когда $u = 0$ — асимптотическая параллель (аналогично имеем и в окрестности $u = u_0$). Теперь переходя к переменной u , ввиду (3), получаем, что уравнение (7) имеет в окрестности $u = 0$ пару линейно независимых решений

$$(12) \quad \begin{aligned} \chi_{k,1}(u) &= u^{\frac{1}{2}[1+\mu_k(n_1)]} \chi_{k,1}^0(u), \\ \chi_{k,2}(u) &= u^{\frac{1}{2}[1-\mu_k(n_1)]} \chi_{k,2}^0(u), \quad \chi_{k,i}^0(0) \neq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\mu_k(n_1) = \sqrt{1 + 4n_1(1 - n_1)(k^2 - 1)}$, когда $u = 0$ — полюс поверхности, и

$$(13) \quad \begin{aligned} \chi_{k,1}(u) &= u \chi_{k,1}^0(u), \\ \chi_{k,2}(u) &= \chi_{k,2}^0(u), \quad \chi_{k,i}^0(0) \neq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

когда $u = 0$ — асимптотическая параллель (аналогично имеем и в окрестности $u = u_0$). Отсюда видно, что искомое решение $\chi_k(u)$ уравнения (7) надо иметь в окрестности $u = 0$ вид (12₁), когда $u = 0$ — полюс, и вид (13₁), когда $u = 0$ асимптотическая параллель (аналогично и в окрестности $u = u_0$).

Любая поверхность S_λ семейств S_λ^2 , S_λ^1 , S_λ^0 имеет конечное число поясов гауссовой кривизны $K < 0$ и конечное число поясов с $K \geq 0$. Притом

любой из поясов S_{0u_1} и S_{u_p, u_0} , получаемых соответственно для $u \in (0, u_1)$ и $u \in (u_p, u_0)$ может иметь $K \geq 0$ или $K < 0$. Например для поверхностей S_λ^2 возможны три случая — когда оба пояса имеют $K \geq 0$, когда оба имеют $K < 0$, и когда один пояс имеет $K \geq 0$, а другой $K < 0$. Аналогично имеем и для поверхностей S_λ^1 и S_λ^0 , но при них разнообразие увеличивается за счет полюсов — любой из них может быть как коническим, так и гладким. На рис. 1, 2, 3 даны случаи когда пояс S_{0u_1} имеет кривизну $K \geq 0$, а пояс S_{u_p, u_0} — $K < 0$.

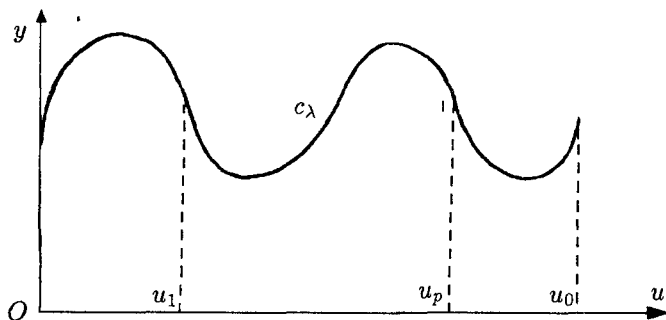


Рис. 1

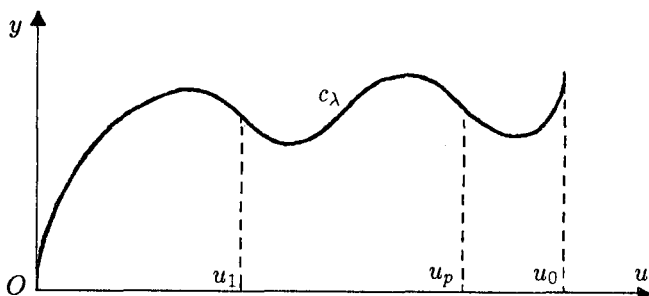


Рис. 2

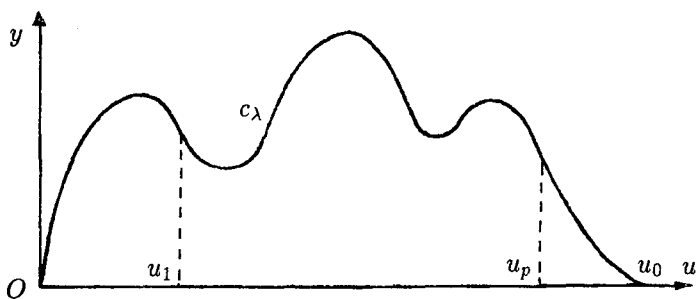


Рис. 3

Пусть $J \subset (0, u_0)$ произвольный интервал, в котором $r'_\lambda(u) > 0$ (соответствующий ему пояс поверхности имеет гауссовую кривизну $K < 0$). Так как $0 \leq m_1, m_2 \leq 1$ и

$$(14) \quad r''_\lambda = \lambda m_1(m_1 - 1)u^{m_1-2}(u_0 - u)^{m_2} - 2\lambda m_1 m_2 u^{m_1-1}(u_0 - u)^{m_2-1} + \lambda m_2(m_2 - 1)u^{m_1}(u_0 - u)^{m_2-2} + \varphi''(u),$$

то

$$(15) \quad \varphi''(u) > 0 \quad \text{для } u \in J.$$

Напишем уравнение (7) в виде

$$(16) \quad \chi''_k(u) + G_k(u, \lambda)\chi_k(u) = 0, \quad u \in (0, u_0),$$

где

$$(16') \quad G_k(u, \lambda) = \frac{(k^2 - 1)r''_\lambda(u)}{r_\lambda(u)}.$$

Пусть $k \geq 2$ и $u \in J$ фиксированы. Тогда из (14) и (15) получаем

$$(17) \quad \frac{dG_k(u, \lambda)}{d\lambda} = \frac{k^2 - 1}{r_\lambda^2} \left\{ \varphi(u) \left[m_1(m_1 - 1)u^{m_1-2}(u_0 - u)^{m_2} - 2m_1 m_2 u^{m_1-1}(u_0 - u)^{m_2-1} + m_2(m_2 - 1)u^{m_1}(u_0 - u)^{m_2-2} \right] - u^{m_1}(u_0 - u)^{m_2} \varphi''(u) \right\} < 0.$$

Следовательно $G_k(u, \lambda)$ убывает когда $k \geq 2$ и $u \in J$ фиксированы.

Точки перегиба меридиана c_λ могут не зависеть от λ , могут и зависеть. Из (14) и (15) видно, что в последнем случае, если u_i и u_{i+1} две соседние точки перегиба и $r'_\lambda(u) > 0$ в (u_i, u_{i+1}) , т. е. соответствующая дуга меридиана выпукла, то когда λ увеличивается u_i передвигается направо, а u_{i+1} — налево. Следовательно, когда λ увеличивается, любой интервал выпуклости сжимается (притом оба его края передвигаются к внутренности интервала пока не слейтся), а любой интервал вогнутости расширяется.

Б. Рассмотрим сначала случай когда $p = 1$, т. е. когда меридиан c_λ имеет одну точку перегиба (см. рис. 4-6). Притом подробно докажем только теорему 1 (доказательство теорем 2 и 3 аналогично).

Теперь поверхность S_λ двухсвязная (см. рис. 4). Меридиан c_λ имеет в окрестности $u = 0$ (соответственно $u = u_0$) представление (3) и $r''_\lambda(u) \leq 0$ в $[0, u_1]$, $r''_\lambda(u) > 0$ в (u_1, u_0) . Отметим, что любое решение уравнения (7) в $[0, u_1]$ неколеблющее и его графика обращена выпуклостью к оси Ou .

Пусть параметр λ зафиксирован, т. е. $\lambda = \bar{\lambda}$. Если уравнение (7) с $\lambda = \bar{\lambda}$ имеет при некотором целом $k \geq 2$ нетривиальное решение $\chi_k(u, \bar{\lambda})$, имеющее в окрестности $u = 0$ и $u = u_0$ соответственно вид (13₁) и

$$(18) \quad \chi_k(u) = (u_0 - u)\tilde{\chi}_k^0(u), \quad \tilde{\chi}_k^0(u_0) \neq 0,$$

то поверхность $S_{\bar{\lambda}}$ нежесткая, так как это решение удовлетворяет краевым условиям (8). Предположим, что уравнение (7) не имеет такого решения,

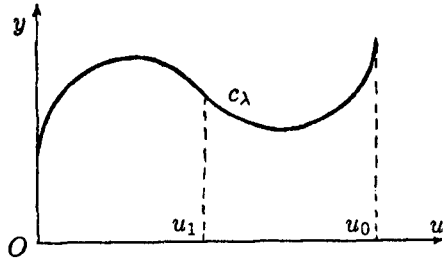


Рис. 4

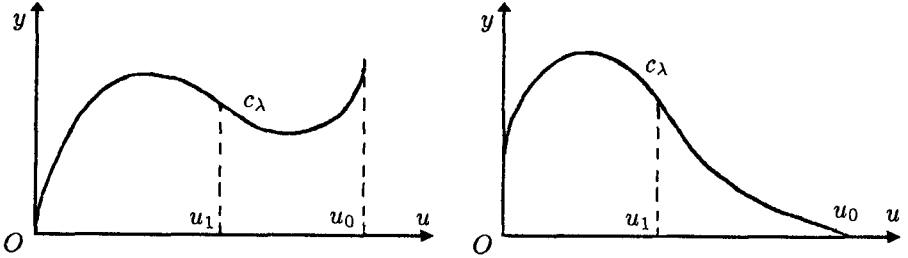


Рис. 5

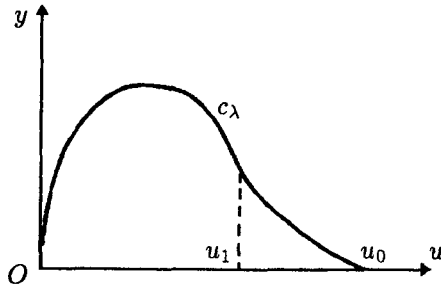


Рис. 6

т. е. что поверхность $S_{\bar{\lambda}}$ жестка. Пусть $N \geq 3$ произвольное число и \bar{u}_1, \bar{u}_0 такие, что $u_1 < \bar{u}_1 < \bar{u}_0 < u_0$. Будем сравнивать в $J = [\bar{u}_1, \bar{u}_0]$ решения уравнений (7), т. е. (16), и

$$(19) \quad Y''(u) + \mu^2 Y(u) = 0.$$

Имеем

$$(20) \quad \min_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_0} G_k(u, \bar{\lambda}) = \min_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_0} \frac{(k^2 - 1)r_\lambda''(u)}{r_\lambda(u)} \geq \frac{(k^2 - 1)m(\bar{\lambda})}{M(\bar{\lambda})},$$

где $m(\bar{\lambda}) = \min r_\lambda''(u)$, $M(\bar{\lambda}) = \max r_\lambda(u)$, когда $u \in [\bar{u}_1, \bar{u}_0]$. Выберем k_0 так,

что

$$(21) \quad \frac{(k^2 - 1)m(\bar{\lambda})}{M(\bar{\lambda})} > \left(\frac{N\Pi}{\bar{u}_0 - \bar{u}_1} \right)^2.$$

Поскольку интеграл

$$(22) \quad Y = \sin \mu(u - \bar{u}_1)$$

уравнения (19) при $\mu = \frac{N\Pi}{\bar{u}_0 - \bar{u}_1}$ имеет $N + 1$ нулей в $J = [\bar{u}_1, \bar{u}_0]$ и в виду (20) и (21) $G_k(u, \bar{\lambda}) > \mu^2$ в $J = [\bar{u}_1, \bar{u}_0]$, то из теоремы Штурма (см. например [8]) следует, что любой интеграл уравнения (7) будет иметь $M_k \geq N \geq 3$ нулей в $J = [\bar{u}_1, \bar{u}_0]$.

Пусть $\bar{k} \geq k_0$ фиксировано. Тогда любое решение $\chi_{\bar{k}}(u, \bar{\lambda})$ уравнения (7) имеет в (u_1, u_0) не менее 3 нулей. Пусть $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (13₁) в окрестности $u = 0$, где $\chi_{\bar{k},1}^0(0) > 0$. Обозначим его нули в $[0, u_0]$ через $\bar{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, \bar{M} + 1$. Тогда $\chi_{\bar{k}}^1(0, \bar{\lambda}) = 0$, т. е. $\alpha_1 = 0$, $\chi_{\bar{k}}^1(0, \bar{\lambda}) > 0$ в $(0, u_1]$ и $u_1 < \bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_3 < \dots < \bar{\alpha}_{\bar{M}+1} < u_0$, где $\bar{M} \geq 3$ (см. рис. 7). Пусть $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (18) в окрестности $u = u_0$ и обозначим его нули в $[0, u_0]$ через $\bar{\beta}_i$, $\bar{\beta}_{i+1} < \bar{\beta}_i$. Тогда $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda}) = 0$, т. е. $\bar{\beta}_1 = u_0$. Поскольку поверхность $S_{\bar{\lambda}}^2$ жестка, то $\chi_{\bar{k}}^1(u_0, \bar{\lambda}) \neq 0$, $\chi_{\bar{k}}^2(0, \bar{\lambda}) \neq 0$.

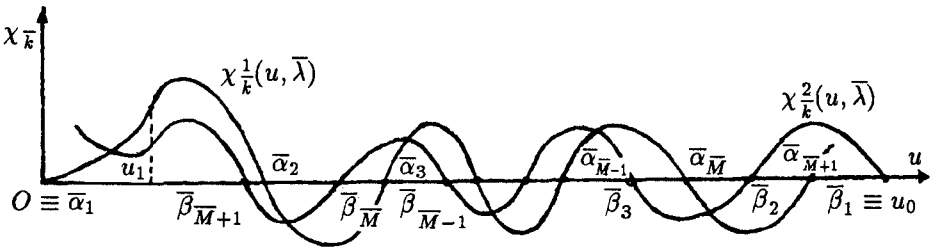


Рис. 7

Имеют место

Лемма 1. Нули решения $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ и $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$ в $[0, u_0]$ чередуются.

Лемма 2. Если параметр $\lambda \geq \bar{\lambda}$ увеличивается, то нули решения $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ в (u_1, u_0) передвигаются налево.

Доказательство этих лемм дадим в п. 4. Здесь отметим, что согласно лемме 1 имеем (см. рис. 7)

$$0 = \bar{\alpha}_1 < \bar{\beta}_{\bar{M}+1} < \bar{\alpha}_2 < \bar{\beta}_{\bar{M}} < \bar{\alpha}_3 < \bar{\beta}_{\bar{M}-1} < \bar{\alpha}_4 < \dots \\ < \bar{\beta}_3 < \bar{\alpha}_{\bar{M}} < \bar{\beta}_2 < \bar{\alpha}_{\bar{M}+1} < \bar{\beta}_1 = u_0.$$

Отметим еще, что нули любого решения $\chi_k^-(u, \lambda)$ уравнения (7) в $(0, u_0)$ непрерывно зависят от λ , так как функция $G_k^-(u, \lambda)$ зависит непрерывно от λ (см. например [9], стр. 61). Поэтому тогда параметр λ увеличивается непрерывно, нули решения $\chi_k^2(u, \lambda)$ в (u_1, u_0) непрерывно передвигаются налево. Притом расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения $\chi_k^-(u, \lambda)$ уравнения (7) в $[u_1, \bar{u}_0]$ больше или равно $\frac{\Pi}{\tilde{M}(\lambda)}$ [8], где в виду (17) функция $\tilde{M}^2(\lambda) = \max_{u_1 \leq u \leq \bar{u}_0} G_k^-(u, \lambda)$ убывающая.

Рассмотрим сначала случай, когда точка перегиба u_1 не зависит от λ (см. [3]). Теперь имеем $m_1 = m_2 = 0$, т. е. $r_\lambda = \lambda + \varphi(u)$, и следовательно u_1 одна и та же для всех $\lambda \in (0, \infty)$.

Увеличим λ от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\bar{\lambda}}$, где $\bar{\bar{\lambda}}$ такое, что

$$(23) \quad \max_{u_1 \leq u \leq \bar{\beta}_{\bar{M}-1}} G_k^-(u, \bar{\bar{\lambda}}) < \frac{\Pi^2}{(\bar{\beta}_{\bar{M}-1} - u_1)^2}.$$

Обозначим нули решения $\chi_k^2(u, \bar{\bar{\lambda}})$ в $[u_1, u_0]$ через $\bar{\beta}_j$, $j = 1, \dots, \bar{\bar{M}} + 1$, $\bar{\beta}_{\bar{\bar{M}}+1} < \bar{\beta}_{\bar{M}} < \bar{\beta}_{\bar{M}-1} < \dots < \bar{\beta}_2 < \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_1 = u_0$. Так как $G_k^-(u, \bar{\bar{\lambda}}) < G_k^-(u, \bar{\lambda})$ в (u_1, u_0) и $G_k^-(u_1, \bar{\bar{\lambda}}) = G_k^-(u_1, \bar{\lambda})$, то $\bar{\beta}_j$ левее $\bar{\beta}_j$, $j = 2, \dots, \bar{\bar{M}} + 1$, и расстояние между любыми двумя последовательными нулями решения $\chi_k^2(u, \bar{\bar{\lambda}})$ в $[u_1, \bar{u}_0]$ больше или равно $\frac{\Pi}{\tilde{M}(\bar{\bar{\lambda}})}$, где $\tilde{M}^2(\bar{\bar{\lambda}}) = \max_{u_1 \leq u \leq \bar{u}_0} G_k^-(u, \bar{\bar{\lambda}}) < \tilde{M}^2(\bar{\lambda})$.

Притом $\bar{\bar{M}} \leq \bar{M}$ так как нули $\chi_k^2(u, \bar{\bar{\lambda}})$ в $(u_1, u_0]$ либо $\bar{\bar{M}}$ (это имеет место когда $\bar{\beta}_{\bar{\bar{M}}+1} \in (0, u_1]$), либо $\bar{\bar{M}} + 1$ (это имеет место, когда $\bar{\beta}_{\bar{\bar{M}}+1} \in (u_1, u_0]$).

Покажем, что $\bar{\bar{M}} \leq \bar{M} - 2$. Допустим, что $\bar{\bar{M}} = \bar{M} - 1$. Тогда $\chi_k^2(u, \bar{\bar{\lambda}})$ будет иметь нули $\bar{\beta}_{\bar{M}}$ и $\bar{\beta}_{\bar{M}-1}$ в $[u_1, \bar{\beta}_{\bar{M}-1})$. Притом $\bar{\beta}_{\bar{M}} \neq \bar{\beta}_{\bar{M}-1}$ так как $\bar{\beta}_{\bar{M}-1} - \bar{\beta}_{\bar{M}} \geq \frac{\Pi}{\tilde{M}(\bar{\bar{\lambda}})}$. Рассмотрим теперь уравнение (19) при $\mu = \frac{\Pi}{\bar{\beta}_{\bar{M}-1} - u_1}$. В

виду (23) его решение $Y = \sin \mu(u - u_1)$ должно иметь нуль в $(\bar{\beta}_{\bar{M}}, \bar{\beta}_{\bar{M}-1}) \subset (u_1, \bar{\beta}_{\bar{M}-1})$. Но это невозможно, поскольку $u = u_1$ и $u = \bar{\beta}_{\bar{M}-1}$ его последовательные нули. Аналогичным способом получаем, что случай $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ тоже невозможен. Следовательно $\bar{\bar{M}} \leq \bar{M} - 2$, т. е. $\bar{\bar{M}} + 1 \leq \bar{M} - 1$, и разница между числом нулей $\chi_k^2(u, \bar{\bar{\lambda}})$ и числом нулей $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ в $[u_1, u_0]$ будет $\bar{\bar{M}} - (\bar{M} + 1) \geq 1$, когда $\bar{\beta}_{\bar{\bar{M}}+1} \in [0, u_1)$, и $\bar{\bar{M}} + 1 - (\bar{M} + 1) = 2$, когда $\bar{\beta}_{\bar{\bar{M}}+1} \in [u_1, u_0]$. В виду того, что при непрерывном изменении параметра λ от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\bar{\lambda}}$ нули β_i , $i = 2, \dots, \bar{M}$, решения $\chi_k^2(u, \lambda)$ непрерывно передвигаются налево и расстояние между любыми двумя последовательными

нулями больше или равно $\frac{\Pi}{\tilde{M}(\lambda)}$, где $\tilde{M}(\lambda)$ убывающая функция параметра λ , то следует, что и в обоих случаях по меньшей мере нуль $\beta_{\overline{M}} \in [u_1, u_0]$, т. е. $\beta_{\overline{M}}$ перешел через точку $u = u_1$. Непрерывно передвигаясь налево нуль $\beta_{\overline{M}}$ сначала встретит α_2 , а потом u_1 поскольку α_2 всегда больше u_1 ($\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda)$ имеет в $[0, u_1]$ только нуль $\alpha_1 = 0$). Тогда существует $\lambda_1 \in [\bar{\lambda}, \bar{\lambda}]$, такое, что нуль $\beta_{\overline{M}}(\lambda_1)$ решения $\chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda_1)$ совпадает с нулем $\alpha_2(\lambda_1)$ решения $\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_1)$. Следовательно решения $\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_1)$ и $\chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda_1)$ линейно зависимые в $(0, u_0)$, т. е.

$$\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_1) = c \chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda_1), \quad u \in (0, u_0), \quad c = \text{const.}$$

Отсюда граничным переходом при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow u_0$ получаем $\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_1) = c \chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda_1)$ для $u \in [0, u_0]$ (см. рис. 8), т. е. $\chi_{\overline{k}}^1(u_0, \lambda_1) = 0$, $\chi_{\overline{k}}^2(0, \lambda_1) = 0$. Таким образом решение $\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_1)$ уравнения (7) определяет нетривиальное поле $U_{\overline{k}}(u, v, \lambda_1)$ б.м. изгибания поверхности $S_{\lambda_1}^2$ и следовательно она нежестка.

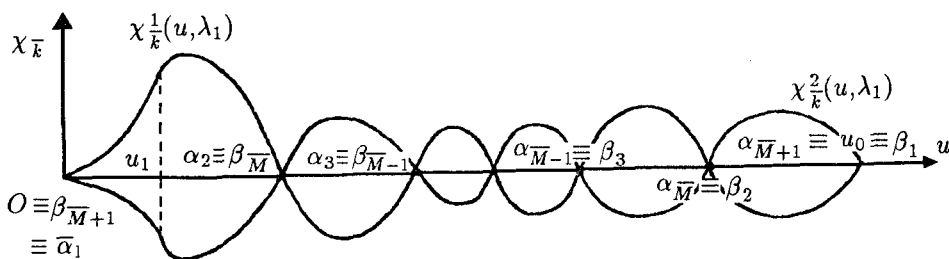


Рис. 8

Продолжая увеличивать параметр λ найдем такое $\lambda = \lambda_2$ для которого нуль $\beta_{\overline{M}-1}(\lambda_2)$ решения $\chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda_2)$ совпадает с нулем $\alpha_2(\lambda_2)$ решения $\chi_{\overline{k}}^1(u, \lambda_2)$ и следовательно поверхность $S_{\lambda_2}^2$ будет нежесткой. Этот процесс можно продолжить пока в (u_1, u_0) останется только нуль β_2 решения $\chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda)$ (см. рис. 9, где даны графики функции $\beta_{\overline{M}+1}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}-1}(\lambda)$, $\beta_{\overline{M}-2}(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$, $\alpha_3(\lambda)$, $\alpha_4(\lambda)$).

Пусть теперь точка перегиба u_1 зависит от λ . При непрерывном увеличении параметра λ нули решения $\chi_{\overline{k}}^2(u, \lambda)$ непрерывно передвигаются налево, а точка перегиба $u_1(\lambda)$ — направо. Из равенства (14) видно, что u_1 совпадает с $\beta_{\overline{M}}$ при $\tilde{\lambda} = -\varphi''(\beta_{\overline{M}}) / Q(\beta_{\overline{M}})$ где

$$Q(\beta_{\overline{M}}) = m_1(m_1 - 1)\overline{\beta_{\overline{M}}}^{m_1-2} (u_0 - \overline{\beta_{\overline{M}}})^{m_2} - 2m_1m_2\overline{\beta_{\overline{M}}}^{m_1-1} (u_0 - \overline{\beta_{\overline{M}}})^{m_2-1} - m_2(m_2 - 1)\overline{\beta_{\overline{M}}}^{m_1} (u_0 - \overline{\beta_{\overline{M}}})^{m_2-2}.$$

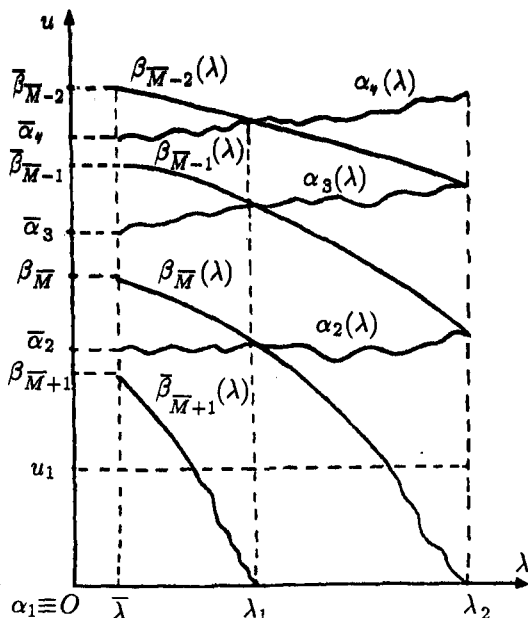


Рис. 9

Первая нежесткая поверхность $S_{\lambda_1}^2$ получится для того $\lambda_1 \in (\bar{\lambda}, \tilde{\lambda})$, для которого $\beta_{\bar{M}}(\lambda_1) \equiv \alpha_2(\lambda_1)$, вторая $S_{\lambda_2}^2$ — для того $\lambda_2 > \lambda_1$, для которого $\beta_{\bar{M}-1}(\lambda_2) = \alpha_2(\lambda_2)$. Увеличивая λ пока точка перегиба u_1 совпадет с $\beta_{\bar{M}-1}$ получим последовательно нежесткие поверхности $S_{\lambda_3}^2, \dots, S_{\lambda_{\bar{M}-1}}^2$.

Множество нежестких поверхностей в семействе S_{λ}^2 счетное, поскольку любой интеграл $\chi_k^2(u, \lambda)$ уравнения (7) имеет конечное число нулей в $[u_1, u_0]$, а k принимает все целые значения больше 1.

В. Теперь рассмотрим случай, когда меридиан s_{λ} имеет $p > 1$ точек перегиба. Докажем опять только теорему 1 — притом сначала предположим, что точки перегиба не меняются.

а) Пусть пояс S_{0u_1} поверхности S_{λ}^2 имеет гауссовую кривизну $K \geq 0$, а пояс $S_{u_p u_0}$ имеет $K < 0$. Тогда $r_{\lambda}''(u) > 0$ в (u_i, u_{i+1}) , $i = 1, 3, \dots, p$ (i — нечетное, $u_{p+1} \equiv u_0$). Пусть $\lambda = \bar{\lambda}$ фиксировано и поверхность S_{λ}^2 жесткая. Выберем целое число k_0^i так, что любой интеграл $\chi_{k_0^i}(u, \bar{\lambda})$ уравнения (7) имел бы N_i нулей в $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 1, 3, \dots, p$, притом $N_1 \geq 3$, $N_p \geq 3$, $N_l \geq 2$, $l = 3, \dots, p-2$ (l — нечетное). Обоснование существования такого числа k_0^i приводится таким образом как в пункте Б. Фиксируем целое число $\bar{k} > k_0 = \max(k_0^1, k_0^3, \dots, k_0^p)$. Пусть $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ интеграл уравнения (7), имеющий вид (13₁) в окрестности u_0 , а $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$ — интеграл уравнения (7), имеющий вид (18) в окрестности $u = u_0$. Обозначим в $[u_i, u_{i+1}]$ нули интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ через $\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^i, \dots, \bar{\alpha}_{M_i}^i$, $\bar{\alpha}_1^i < \bar{\alpha}_2^i < \dots < \bar{\alpha}_{M_i}^i$, а нули $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$

через $\bar{\beta}_1^i, \bar{\beta}_2^i, \dots, \bar{\beta}_{N_i}^i, \bar{\beta}_1^i > \bar{\beta}_2^i > \dots > \bar{\beta}_{N_i}^i, i = 1, 3, \dots, p$. Имеем $\bar{M}_i, \bar{N}_i \geq N_i$ и $0 \leq |\bar{M}_i - \bar{N}_i| \leq 1, i = 1, 3, \dots, p$, так как согласно лемме 1 нули интегралов $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ и $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ чередуются. Кроме этого согласно лемме 2 нули любого интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$ в (u_p, u_0) передвигаются налево. Рассмотрим интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ уравнения (19) при

$$(24) \quad \mu = \frac{(\bar{N}_p - 2)\Pi}{\bar{\beta}_2^p - u_p}.$$

Он имеет $\bar{N}_p - 1$ нулей в $[u_p, \bar{\beta}_2^p]$. Увеличим λ от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\lambda}^p$, где $\bar{\lambda}^p$ такого, что

$$(25) \quad \max_{u_p \leq u \leq \bar{\beta}_2^p} G_k(u, \bar{\lambda}^p) < \mu^2 = \frac{(\bar{N}_p - 2)^2 \Pi^2}{(\bar{\beta}_2^p - u_p)^2}.$$

Тогда интеграл $\chi_k^2(u, \bar{\lambda}^p)$ уравнения (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^p$ будет иметь \bar{N}'_p нулей в $[u_p, u_0]$, где $\bar{N}'_p \leq \bar{N}_p - 1$. В самом деле, если допустим, что $\bar{N}'_p > \bar{N}_p - 1$, то $\chi_k^2(u, \bar{\lambda}^p)$ будет иметь $\bar{N}'_p - 1 > \bar{N}_p - 2$ нулей $\bar{\beta}_2^p, \dots, \bar{\beta}_{\bar{N}'_p - 1}^p, \bar{\beta}_2^p < \bar{\beta}_2^p$, в $[u_p, \bar{\beta}_2^p]$, а интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ уравнения (19) в виду (25) должен иметь там по меньшей мере $\bar{N}'_p > \bar{N}_p - 1$ нулей. Но это невозможно, поскольку в виду (24) интеграл $y = \sin \mu(u - u_p)$ имеет там $\bar{N}_p - 1$ нулей.

Пусть теперь

$$(26) \quad \mu = \frac{(\bar{N}_{p-2} - 1)\Pi}{u_{p-1} - u_{p-2}}$$

и $\lambda = \bar{\lambda}^{p-2} \geq \bar{\lambda}^p$ такого, что

$$(27) \quad \max_{u_{p-2} \leq u \leq u_{p-1}} G_k(u, \bar{\lambda}^{p-2}) < \mu^2 = \frac{(\bar{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{(u_{p-1} - u_{p-2})^2}.$$

Сравниваем интеграл $\chi_k^2(u, \bar{\lambda}^{p-2})$ уравнения (7) и интеграл $y = \sin \mu(u - u_{p-1})$ уравнения (19) при условиях (26) и (27). Получаем, что $\chi_k^2(u, \bar{\lambda}^{p-2})$ имеет $\bar{N}'_{p-2} \leq \bar{N}_{p-2} - 1$ нулей в $[u_{p-2}, u_{p-1}]$. Поступая аналогичным образом и для следующих интегралов, получаем для λ соответственно значения $\bar{\lambda}^3 \geq \bar{\lambda}^5 \geq \dots \geq \bar{\lambda}^{p-2} \geq \bar{\lambda}^p$. Наконец для интервала $[u_1, u_2]$ выберем $\mu = \frac{(\bar{N}_1 - 2)\Pi}{u_2 - u_1}$ и $\lambda = \bar{\lambda}^1 \geq \bar{\lambda}^3$, так, что

$$\max_{u_1 \leq u \leq u_2} G_k(u, \bar{\lambda}^1) < \mu^2 = \frac{(\bar{N}_1 - 2)^2 \Pi^2}{(u_2 - u_1)^2}.$$

Очевидно, что интеграл $\chi_k^2(u, \bar{\lambda}^1)$ уравнения (7) имеет в $[u_1, u_2]$ по меньшей мере два нуля меньше, чем $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$, а в $[u_i, u_{i+1}], i = 3, 5, \dots, p$, по меньшей мере на единицу меньше.

Окончательно получаем, что при увеличении параметра λ от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\lambda}^1$ из $\bigcup_{i=1}^p [u_i, u_{i+1}]$ (i — нечетное) исчезли по меньшей мере $\frac{p+1}{2} + 1$ нулей интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$. Притом расстояние между любыми двумя соседними ну-

лями β_j^i и β_{j+1}^i больше или равно $\frac{\Pi}{\tilde{M}^i(\lambda)}$, где $(\tilde{M}^i(\lambda))^2 = \max_{u_i \leq u \leq u_{i+1}} G_{\bar{k}}(u, \lambda)$

и $\tilde{M}^i(\lambda)$ убывающая функция, $i = 1, 3, \dots, p$. С другой стороны в любом из интервалов $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{p-1}, u_p)$ интеграл $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ может иметь не больше одного нуля. Поскольку число этих интервалов на два меньше минимального числа исчезнувших нулей и $\chi_k^2(u, \lambda)$ имеет в $[0, u_1]$

только нуль $u = 0$, то следует, что когда λ увеличивалась от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\lambda}^1$, по меньшей мере один из нулей интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$ в $[u_1, u_2]$ перешел через нуль α_1^1 интеграла $\chi_k^1(u, \lambda)$. Тогда для некоторого $\lambda_1 \in (\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^1)$ нули интеграла $\chi_k^2(u, \lambda_1)$ и нули интеграла $\chi_k^1(u, \lambda_1)$ совпадают и следовательно соответствующая поверхность $S_{\lambda_1}^2$ будет нежестка.

Продолжая увеличивать параметр λ получим нежесткие поверхности $S_{\lambda_2}^2, S_{\lambda_3}^2$ и т. д. Очевидно, при фиксированном \bar{k} можем увеличивать λ пока в некотором из интервалов $[u_3, u_4], [u_5, u_6], \dots, [u_{p-2}, u_{p-1}]$ останутся меньше 2 нуля или в некотором из интервалов $[u_1, u_2], [u_p, u_0]$ останутся меньше 3 нуля интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$.

б) Пусть пояса S_{0u_1} и $S_{u_p u_0}$ поверхности S_{λ}^2 имеют $K \geq 0$. Теперь $r''_{\lambda}(u) > 0$ в интервалах $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{p-1}, u_p)$ и $r''_{\lambda}(u) \leq 0$ в $[0, u_1], [u_2, u_3], \dots, [u_p, u_0]$ (число первых интервалов $\frac{p}{2}$, а вторых — $\frac{p}{2} + 1$). Ин-

тегралы уравнения (7) не колеблются в $[0, u_1], [u_2, u_3], \dots, [u_p, u_0]$ и любой интеграл $\chi_k^1(u, \lambda)$ имеет в $[0, u_1]$ только нуль $u = 0$, а любой интеграл $\chi_k^2(u, \lambda)$ имеет в $[u_p, u_0]$ только нуль $u = u_0$. Пусть \bar{k} и $\bar{\lambda}$ фиксированы и так выбрани, что $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ имеет в $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 1, 3, \dots, p-1$ (i — нечетное), \bar{N}_i

нулей, где $\bar{N}_1 \geq 3, \bar{N}_l \geq 2, l = 3, \dots, p-1$. Пусть $\bar{\lambda} > \bar{\lambda}$ такого, что число нулей интеграла $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ меньше число нулей $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ по меньшей мере бы на единицу в любом интервале $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 3, 5, \dots, p-1$, и по меньшей мере на две в $[u_1, u_2]$. Существование таких чисел $\bar{k}, \bar{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ обосновывается таким же способом как в случае а). Так как при увеличении λ от $\bar{\lambda}$ до

$\bar{\lambda}$ исчезли по меньшей мере $\frac{p}{2} + 1$ нулей интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$ из $\bigcup_{i=1}^{p-1} [u_i, u_{i+1}]$

(притом минимальное расстояние между последовательными нулями увеличивалось), а число интервалов $[u_2, u_3], [u_4, u_5], \dots, [u_{p-2}, u_{p-1}]$ — $\frac{p}{2} - 1$,

то по меньшей мере два нуля решения $\chi_k^2(u, \lambda)$ из $[u_1, u_2]$ перешли через u_1 . Тогда для некоторого $\lambda_1 \in (\bar{\lambda}, \bar{\lambda})$ имеем $\chi_k^1(u, \lambda_1) = c\chi_k^2(u, \lambda_1)$, $c = \text{const}$,

и следовательно поверхность $S_{\lambda_1}^2$ нежесткая. Продолжая увеличивать параметр $\lambda > \lambda_1$ получим нежесткие поверхности $S_{\lambda_2}^2, S_{\lambda_3}^2$ и т. д.

в) Наконец установимся на случай когда пояси S_{0u_1} и $S_{u_p u_0}$ имеют $K < 0$. Теперь $r''_\lambda(u) > 0$ в интервалах $(0, u_1), (u_2, u_3), \dots, (u_p, u_0)$ (число этих интервалов $\frac{p}{2} + 1$). Когда λ растёт нули $\chi_k^1(u, \lambda)$ в $(0, u_1)$ передвигаются направо, нули $\chi_k^2(u, \lambda)$ в (u_p, u_0) передвигаются налево и кроме этого минимальное расстояние между последовательными нулями в $(0, u_1), (u_2, u_3), \dots, (u_p, u_0)$ любого интеграла уравнения (7) увеличивается. Пусть \bar{k} и $\bar{\lambda}$ такие, что $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$ имеет по меньшей мере 3 нуля в $[u_p, u_0]$, по меньшей мере 4 нуля в $[u_2, u_3]$ и по меньшей мере 2 нуля в $[u_l, u_{l+1}]$, $l = 4, 6, \dots, p-2$ (l — четное). Пусть $\lambda = \bar{\lambda} > \bar{\lambda}$ такого, что число нулей интеграла $\chi_{\bar{k}}^2(u, \bar{\lambda})$ меньше число нулей интеграла $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ по меньшей мере на единицу в $[u_r, u_{r+1}]$, $r = 4, 6, \dots, p$ (r — четное), и по меньшей мере на три в $[u_2, u_3]$. Поскольку в $[0, u_1]$ число нулей интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ не превосходит число нулей интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \lambda)$, нуль $\bar{\alpha}_j$ интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \bar{\lambda})$ в $(0, u_1)$ правее нуля $\bar{\alpha}_j$ интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \lambda)$, $j > 1$, и нули $\chi_{\bar{k}}^1(u, \lambda)$ разделяют нули $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ в $[0, u_0]$, то когда λ меняется от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\lambda}$ ни одного нуля интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \lambda)$ из (u_1, u_0) не может перейти в $[0, u_1]$, а в (u_1, u_2) может перейти не больше одного. В то же время по меньшей мере три нуля интеграла $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ из $[u_2, u_3]$ передвинулись левее u_2 . Но когда самый большой нуль $\beta_{\bar{N}_2-2}(\lambda)$ из этих трех нулей интеграла $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ должен был перейти через u_2 , то средний нуль уже должен был находиться левее u_1 , а это обозначает, что $\beta_{\bar{N}_2-2}(\lambda)$ заранее совпал при некоторого $\lambda = \lambda_1 \in (\bar{\lambda}, \bar{\lambda})$ с предходным ему нулем интеграла $\chi_{\bar{k}}^1(u, \lambda_1)$ (для этого λ_1 конечно совпали все нули интеграла). Тогда $\chi_{\bar{k}}^1(0, \lambda_1) = c\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda_1)$ и следовательно поверхность $S_{\lambda_1}^2$ нежесткая. Аналогично получим нежесткие поверхности $S_{\lambda_2}^2, S_{\lambda_3}^2$ и т. д.

Если точки перегиба меридиана s_λ зависят от λ , то доказательство можно провести тоже таким же способом. В самом деле в случае а) если обозначим через u_1, \dots, u_p точки перегиба меридиана при $\lambda = \bar{\lambda}$, то все прежние неравенства опять имеют место, так как $G_{\bar{k}}(u, \bar{\lambda}) \leq 0$ в интервалах где меридиан выпуклый вверх и при увеличении λ интервалы, где меридиан выпуклый вниз, уменьшаются. Например неравенство (27) переходит в

$$(27') \quad \max_{u_{p-2}(\bar{\lambda}^{p-2}) \leq u \leq u_{p-1}(\bar{\lambda}^{p-2})} G_{\bar{k}}(u, \bar{\lambda}^{p-2}) = \max_{u_{p-2} \leq u \leq u_{p-1}} G_{\bar{k}}(u, \bar{\lambda}^{p-2})$$

$$< \mu^2 = \frac{(\bar{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{(u_{p-1} - u_{p-2})^2} < \frac{(\bar{N}_{p-2} - 1)^2 \Pi^2}{u_{p-1}(\bar{\lambda}^{p-2}) - u_{p-2}(\bar{\lambda}^{p-2})}.$$

То же самое имеется и в случаях б) и в). Следовательно все прежние рассуждения можно проделать и теперь.

Счетность нежестких поверхностей в семействе S_λ^2 очевидна.

Замечание. В случае, когда точки перегиба меридиана s_λ зависят от λ , утверждения теорем становятся очевидными, так как при увеличении параметра λ интервалы, где меридиан выпуклым вниз, уменьшаются, а расстояние между любыми двумя соседними нулями там увеличивается. В самом деле (установимся на случай а)) пусть $\bar{\lambda}^p \leq \dots \leq \bar{\lambda}^1$, $\bar{\lambda}^p > \bar{\lambda}$, таковы, что

$$|u_{i+1}(\bar{\lambda}^i) - u_i(\bar{\lambda}^i)| < \frac{(\bar{N}_i - 1)\Pi}{\bar{M}^i(\bar{\lambda})}, \quad i = p, \dots, 3,$$

$$|u_2(\bar{\lambda}^1) - u_1(\bar{\lambda}^1)| < \frac{(\bar{N}_1 - 2)\Pi}{\bar{M}^1(\bar{\lambda})}$$

(i — нечетное, $u_{p+1} = u_0$). Таким образом при увеличении λ от $\bar{\lambda}$ до $\bar{\lambda}^1$ из $\bigcup_{i=1}^p [u_i, u_{i+1}]$ (i — нечетное) исчезли по меньшей мере $\frac{p+1}{2} + 1$ нулей интеграла $\chi_k^2(u, \lambda)$, т. е. мы получили ту же ситуацию как в 3.В.а.

4. Доказательство лемм. Согласно теореме Штурма (см. например [8]) между двумя последовательными нулями в $(0, u_0)$ интеграла $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ находится ровно один нуль интеграла $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$. Поэтому чтобы доказать утверждение леммы 1 достаточно показать, что $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ имеет нуль $\bar{\alpha}_{M+1} \in (\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1)$ (очевидно $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ не может иметь там больше одного нуля). Допустим, что $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ не имеет нуля в $(\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1)$. Поскольку решения $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ и $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ уравнения (7) линейно независимые, то $\chi_k^1(\bar{\beta}_1, \bar{\lambda}) \neq 0$, $\chi_k^1(\bar{\beta}_2, \bar{\lambda}) \neq 0$. Тогда функция $f_k(u, \bar{\lambda}) = \chi_k^2(u, \bar{\lambda})/\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ непрерывна в $[\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1]$. Из $f_k(\bar{\beta}_1, \bar{\lambda}) = f_k(\bar{\beta}_2, \bar{\lambda})$ следует, что существует точка $u^0 \in (\beta_2, \beta_1)$ для которой $f_k(u^0, \bar{\lambda}) = 0$. Отсюда получаем, что интегралы $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ и $\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ линейно зависимые в $(0, u_0)$, т. е. $\chi_k^1(u, \bar{\lambda}) = c\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$, $c = \text{const}$. Переходя к пределу при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow u_0$ получаем, что равенство $\chi_k^1(u, \bar{\lambda}) = c\chi_k^2(u, \bar{\lambda})$ имеет место в $[0, u_0]$, и следовательно $\chi_k^1(u_0, \bar{\lambda}) = 0$, $\chi_k^2(0, \bar{\lambda}) = 0$. Так как это противоречит нашему предположению, то следует, что $\chi_k^1(u, \bar{\lambda})$ имеет нуль $\bar{\alpha}_{M+1} \in (\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1)$.

Чтобы доказать лемму 2 надо показать, что в нашем особом случае имеет место теорема Штурма о сравнении (см. [8], стр. 134).

Пусть $\lambda^1 > \lambda^2 \geq \bar{\lambda}$ и $\chi_k^2(u, \lambda^1)$, $\chi_k^2(u, \lambda^2)$ интегралы соответственно уравнений

$$(28) \quad \chi_k''(u) + G_k(u, \lambda^1)\chi_k(u) = 0,$$

$$(29) \quad \chi_{\bar{k}}''(u) + G_{\bar{k}}(u, \lambda^2) \chi_{\bar{k}}(u) = 0,$$

имеющие в окрестности $u = u_0$ вид (18). Поскольку в (u_1, u_0) выполнено неравенство $G_{\bar{k}}(u, \lambda^1) < G_{\bar{k}}(u, \lambda^2)$, то там имеет место теорема Штурма о сравнении. Покажем, что она имеет место и в окрестности особой точки $u = u_0$ уравнений (28) и (29).

Обозначим через β_2^1 и β_2^2 ближайшие нули к β_1 соответственно интегралов $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1)$ и $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2)$. Имеем $\beta_2^1 < \beta_1$, $\beta_2^2 < \beta_1$. Надо доказать, что $\beta_2^1 < \beta_2^2$, т. е. что β_2^2 ближе к β_1 чем β_2^1 . Будем следовать тот же путь как в [8] (см. стр. 135). Поставим в (28) и (29) соответственно интегралы $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1)$ и $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2)$, и умножим первое на $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2)$, а второе — на $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1)$. Вычитая одно уравнения из другого получаем тождество

$$(30) \quad \left[\chi_{\bar{k}}^{2'}(u, \lambda^2) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1) - \chi_{\bar{k}}^{2'}(u, \lambda^1) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2) \right]' + (G_{\bar{k}}(u, \lambda^2) - G_{\bar{k}}(u, \lambda^1)) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2) = 0.$$

Из (3), (11₁), (16') и (18) непосредственно видно, что оба слагаемые в (30) имеют в $u = u_0$ нуль порядка $n_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Допустим, что $\beta_2^2 \leq \beta_2^1$ (предполагаем, что функции $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1)$ и $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2)$ положительные в (β_2^1, u_0) — это всегда можно достичь умножая на постоянный множитель). Интегрируя (30) от β_2^1 до u_0 получаем

$$-\chi_{\bar{k}}^{2'}(\beta_2^1, \lambda^1) \chi_{\bar{k}}^2(\beta_2^1, \lambda^2) = \int_{\beta_2^1}^{u_0} (G_{\bar{k}}(u, \lambda^2) - G_{\bar{k}}(u, \lambda^1)) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^1) \chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda^2) du.$$

Это равенство несовместимо так как его правая часть положительна, а его левая часть — неположительна. Следовательно $\beta_2^1 < \beta_2^2$. Таким образом получили, что теорема Штурма о сравнений нулей решений уравнений (28) и (29) имеет место и в окрестности особой точки $u = u_0$. Тогда при увеличении параметра λ нули интеграла $\chi_{\bar{k}}^2(u, \lambda)$ уравнения (7) в (u_1, u_0) передвигаются налево.

Короткое сообщение результатов этой статьи для более узких классов поверхностей S_{λ}^2 , S_{λ}^1 и S_{λ}^0 опубликовано в [5]. Там $m_1 = m_2 = 0$ для S_{λ}^2 , $m_2 = 0$ и $m_1 = n_1$ для S_{λ}^1 , $m_1 = n_1$ и $m_2 = n_2$ для S_{λ}^0 , где либо $n_i = 1$, либо $n_i \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Кроме этого б.м. изгибаия поверхностей S_{λ}^2 с $m_1 = m_2 = 0$ и S_{λ}^1 с $m_2 = 0$, $m_1 = 1$, меридиан s_{λ} которых имеет одну инфлексную точку и она не зависит от λ , рассмотрены в [3].

Отметим еще, что все поверхности S_{λ}^2 и S_{λ}^1 , в силу результатов статей [10], [11], [12] являются жесткими второго порядка (о б.м. изгибаиях высших порядков замкнутых поверхностей вращения смешанной кривизны см. в [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sohn-Vossen, S. Unstarre geschlossene Flächen. — *Math. Ann.*, **102**, 1929, 10–29.
2. Ефимов, Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. — *Успехи мат. наук*, **3**, 2, 1948, 47–158.
3. Иванова-Каратопраклиева, И. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения смешанной кривизны. — *Сердика*, **1**, 1975, 3–4, 346–355.
4. Иванова-Каратопраклиева, И. Върху някои свойства на полето на безкрайно малко огъване на ротационни повърхнини. — *Год. на Соф. у-т, Фак. по мат. и мех.*, **76**, 1982, 21–40.
5. Иванова-Каратопраклиева, И. Нежесткость некоторых классов поверхностей вращения смешанной кривизны. — *Докл. БАН*, **37**, 5, 1984, 569–572.
6. Иванова-Каратопраклиева, И., И. Х. Сабитов. Изгибание поверхностей I. *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, ВИНТИ*, **23**, 1991, 131–184.
7. Иванова-Каратопраклиева, И., И. Х. Сабитов. Изгибание поверхностей II. *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, ВИНТИ*, **24**, 1992.
8. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения. Москва, 1962.
9. Bocher, M. *Leçons sur les méthodes de Sturm*. Paris, 1917.
10. Сабитов, И. Х. О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения 1. — *Матем. сборник*, **98**(140), 1, 1975, 113–129.
11. Сабитов, И. Х. О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения 2. — *Матем. сборник*, **99**, 1, 1976, 49–57.
12. Minagawa, T., T. Rado. On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. — *Math. Zeitschr.*, **59**, 1953, 151–163.
13. Ivanova-Karatoraklieva, I. Infinitesimal bendings of higher order of rotational surfaces. — *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, **43**, 12, 1990, 13–16.

Поступила 22.06.1992

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 1 — Математика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 1 — Mathématiques

Tome 85, 1991

CLIP++: AN OBJECT-ORIENTED EXTENSION OF A RELATIONAL DBMS

PAVEL AZALOV, VENTSISLAV DIMITROV

Павел Азалов, Венцислав Димитров. CLIP++: ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ РАСШИРЕНИЕ ОДНОЙ РЕЛЯЦИОННОЙ СУБД

В настоящей работе представлена система Clip⁺⁺, которая является объектно-ориентированным расширением реляционной СУБД Clipper 5.0. Clip⁺⁺ дополняет одну из самых распространенных реляционных СУБД объектно-ориентированными средствами. Она обладает основными характеристиками объектно-ориентированных систем: можно определять классы и объекты; обеспечиваются иерархия классов, наследственность и полиморфизм. Реляционные возможности СУБД Clipper 5.0 используются чтобы поддерживать устойчивость объектов.

Pavel Azalov, Ventsislav Dimitrov. CLIP++: AN OBJECT-ORIENTED EXTENSION OF A RELATIONAL DBMS

In this paper the Clip⁺⁺ system is presented. It is an object-oriented extension of the Relational DBMS Clipper 5.0. Clip⁺⁺ tries to upgrade one of the most widely spread Relational DBMS with some object-oriented features. It has the basic characteristics of an object-oriented system: classes and objects can be defined; class hierarchy, inheritance and polymorphism are supported. On the other hand, the relational features of the DBMS Clipper 5.0 are used to achieve the object persistency.

1. INTRODUCTION

The wide usage of the relational DBMS in the development of computer application systems is due mainly to the simplicity of the relational model. But

the relational DBMS cannot directly satisfy the requirements of the new applications in the fields like, for example, the office automation, computer-aided design, and knowledge based systems. These untraditional applications set some serious requirements:

- possibilities for direct modelling of the objects of the application area; the relations of the relational model are not always suitable for this;
- the uniform representation of all relations in the relational database suggests a single level hierarchy; the hierarchy is a typical feature of the modeled areas;
- the semantic modelling features and knowledge representation capabilities are insufficient.

Some approaches for solving these problems can be found in different publications [Gar 89], [Ong 84], [Obs 86], [Unl 90]. In one of the approaches the relation model is replaced by other models, like: entity-relationship model, semantic data models or object-oriented data models. In the first one the relational model is expanded introducing complex objects and abstract data types. One object-oriented extension of the relational database system Clipper 5.0 is represented in this paper.

2. PRELIMINARIES

2.1. OBJECT-ORIENTED CONCEPTS

The object is a basic notion in the object-oriented paradigm. The object unites both state and behavior of the modeled entities in one. The state of an object is characterized with the values of its attributes. The set of operations called *methods*, applicable to these attributes, characterizes the objects, behavior. Objects, sharing the same attributes and methods, are grouped into a class and are called *instances* of that class. The class describes the attributes of its instances and the operations (methods) applicable to them. The methods (their realization), as well as the attributes, however, are not visible from outside the object. The objects can communicate with one another only through messages. These messages are requests for an object to change its state, to return a value, or to perform some sequence of actions. The set of messages to which an object responds constitutes the public interface of an object. Each object responds to a received message by executing a method.

The notion of a class is different from that of a type. Its specification is the same as that of a type but it is more a runtime notion.

Inheritance and polymorphism are key concepts of an object-oriented system. The inheritance allows us to specify or to implement only the extensions between the existing classes and the new ones. The new class “inherits” all properties of the old one — its superclass. The polymorphism allows us to send the same message to different objects and have each object respond in a way appropriate to the kind of object.

2.2. THE SYSTEM CLIPPER 5.0

One of the most famous and worldwide spread relational systems is dBASE. On the basic concepts of dBASE a number of other systems appeared and developed successfully:

- interpreters (dBASE, FoxBase);
- compilers (Clipper);
- translators from the dBASE programming language to other programming languages (dbx3:translator to C);
- libraries for dBASE files manipulation (SoftC: C-library).

Additionally, almost all Relational DBMS support dBASE file compatibility and can manipulate dBASE file format.

The Clipper system takes a central place in the development of the dBASE-like systems. The latest release Clipper 5.0 has some important new features to which we should pay more attention:

- a preprocessor allowing command definition and redefinition;
- a new data type: code block — executable piece of data, which differs from the macros by its compile-time translation;
- four predefined classes: **ERROR**, **GET**, **TBROWSE**, **TBCOLUMN**.

In Clipper 5.0 the definition of new classes is not allowed. Therefore, there is no inheritance or polymorphism. The attributes of an object can be directly accessed and their values changed, so there is no encapsulation either.

A short description of an object-oriented extension of Clipper 5.0, called Clip++, follows in this paper.

2.3. OVERVIEW OF THE CLIP++

The Clip++ system combines the basic features of the object-oriented and the database managing systems. Some of them are:

- class and object definition;
- sub-class definition with inheritance;
- object encapsulation;
- polymorphism;
- persistence.

The Clip++ system is entirely build using only the Clipper 5.0 features. The existing preprocessor is used essentially. The object-oriented features of Clip++ are implemented as user-defined commands and a set of functions.

3. CLIP++ OBJECT MODEL

The four principal concepts of the Clip++ object model are: object, message, class and inheritance.

3.1. CLASS DEFINITION

A new class is defined using a command with the following general format:

```
DEFINE CLASS <class_name> : <parent_class> ;  
    [ <attr> {, <attr> } : <type> ]
```

In curly brackets (“{”, “}”) are enclosed expressions that can appear 0, 1 or more times and in square ones (“[”, “]”), expressions that appear at least once.

The allowable types are: **NUMBER** (<digits> [, <decimals>]), **CHARACTER** (<length>), **DATE**, **MEMO**, **OBJECT** (<of_class>). Let us note that the type of an object field can be another object of any already defined class. Thus an object hierarchy can be build. The class methods are defined as attributes of type **FUNCTION** (<para#>) or **INITIALIZER** (<para#>). The last one represents a constructor method. The appending and removal of attributes are performed respectively by the commands:

```
ADD TO CLASS <class_name> ATTRIBUTES;  
    [ <attr> {, <attr> } : <type> ]
```

```
DELETE FROM CLASS <class_name> ATTRIBUTES <attr> {, <attr> }
```

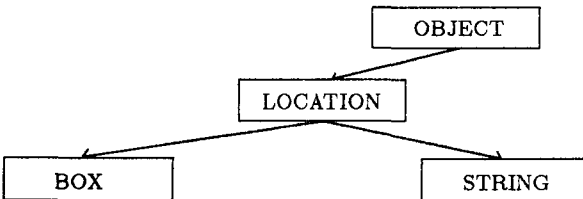
The removal of a class is possible if it has no subclasses and is not nested in other class definitions. The command is:

```
DELETE CLASS <class_name> {, <class_name> }
```

A subclass is defined using the class definition command. Each class can have many subclasses but only one superclass. There is only one predefined root-class called **OBJECT**. Example:

```
DEFINE CLASS location : object ;  
    x, y : NUMERIC (2) ;  
    init : initializer (2) ;  
    move : function (2)  
DEFINE CLASS box : location ;  
    h, w : NUMERIC (2) ;  
    typ : CHARACTER (1) ;  
    clear: function (0)  
DEFINE CLASS string : location ;  
    s : character (24)
```

In the above example three classes are defined, building the following hierarchy:



3.2. OBJECT DECLARATION

Each object is an instance of an existing class. Its declaration is similar to the Clipper 5.0 variable declaration. The object declaration command has the following format:

```
| PRIVATE | PUBLIC | DECLARE | LOCAL : <class_name> ;  
<obj_name>(<param_list>) {, <obj_name>(<param_list>) }
```

An object can be declared with no round brackets. The <param_list> may be empty. Here are some examples:

```
:location L1, L2 (4, 4), L3 ()  
PUBLIC :box B1(4, 4, 10, 10, '-')
```

When no initializing parameter list is passed during an object declaration, no constructor (initializer) is invoked for that object (ex. L1). If a parameter list is passed (even if it is empty), Clip++ tries to initialize the object calling a constructor-method of that class. If there are several constructors defined in one and the same class, Clip++ selects that one which expects number of parameters, closest to the number of the parameters passed, but not less if possible. For example, if the BOX class definition has three constructors INIT1, INIT3, INIT6, expecting 1, 3 and 6 parameters respectively, INIT3 will be selected. The constructor is a method designed to initialize the object at declaration time. If a class contains nested classes in its definition, the best place for initializing the nested objects is in the constructor-method.

3.3. METHOD DEFINITION

The method is a regular Clipper 5.0 function. When a method is defined, its name is preceded by the class name separated with colon (":"). For example:

```
FUNCTION LOCATION:MOVE( X, Y )  
..... <method body> .....  
RETURN <value>
```

To compile a method and make the late binding possible, Clip++ contains a component called *pre-preprocessor*. It creates preprocessor directives converting the methods into regular Clipper 5.0 functions. The pre-preprocessor gives the methods new names, described in the `_C_TABLE_` structure (explained later) as internal method identifiers. During the late binding from the object class and the sent message, the internal identifier is generated and the real compiled function with that name is called. For example, the method name LOCATION:MOVE is translated to an identifier, which looks like F00100202. When a message MOVE (3, 4) is sent to an object of class LOCATION, the F00100202 identifier is generated and the F00100202 function is called.

The attributes of an object are accessible only through its methods. When describing a method body, the class attributes can be accessed. In order to distinguish the attributes from the other variables and objects, their names are preceded by a dot ("."). All the methods of the same class are called in the same way. For example:

```

FUNCTION LOCATION:INIT( X, Y )
.X := X // .X and .Y are object attributes of class LOCATION;
.Y := Y // X and Y are the parameters passed
RETURN Nil
FUNCTION LOCATION:MOVE( X, Y )
.Init(X, Y) // .Init is a method of the same LOCATION class;
RETURN Nil // if used Init(X,Y) function INIT will be called

```

If an attribute is a nested object, a message can be sent using a dot in front of its name (as when accessing attributes) and a colon between its name and the message. The universal way is to assign the object-attribute to a local variable of the same class, work with it as with any object, and then assign it back to the object-attribute. In this way nested objects with unlimited depth can be handled. For example:

```

FUNCTION CLASS1:METHOD1
PRIVATE :location L1(1, 2)
.LOC := :L1 // LOC is a nested object-attribute of class
.LOC:Move(4, 4) // LOCATION to which message Move is sent.
:L1 := .LOC // This shows the processing of a nested
:L1:Move(6, 6) // object-attribute using a temporary
.LOC := :L1 // private object :L1
RETURN Nil

```

Looking back to the object declaration, let us note that the constructor calling is nothing more than an automatic sending of one of the messages marked as initializing.

4. OBJECT MANAGEMENT IN CLIP++

4.1. CLASSES AND ATTRIBUTES DESCRIPTION

One of the basic requirements to a database system is the persistence. For this reason we must have tools to save objects in secondary storage. It is even more necessary the class description to be persistent. Therefore, Clip++ maintains two database files: @CLASSES.DBF and @ATTRIBS.DBF. The @CLASSES.DBF contains the class definitions and the relations of classes, while in the @ATTRIBS.DBF the attributes and methods are described. For faster access to these descriptions the file @CLASSES.DBF is indexed on its attributes CLASS_NAME, CLASS_ID, and PARENT_ID. The @ATTRIBS.DBF file is indexed on CLASS_ID to link the attributes and methods to their class.

The relational schemas of these files are the following:

	Attr. Name	Type	Length	Decimals
@CLASSES.DBF:	CLASS_ID	Character	3	
	CLASS_NAME	Character	11	
	PARENT_ID	Character	3	
	CLASS_ATTR	Numeric	3	0
@ATTRIBS.DBF:	CLASS_ID	Character	3	
	ATTR_NAME	Character	15	
	ATTR_TYPE	Character	1	
	ATTR_LEN	Numeric	3	0
	ATTR_DEC	Character	3	
	ATTR_MODE	Character	1	

Their contents are, for example, the following:

@CLASSES.DBF:				
CLASS_ID	CLASS_NAME	PARENT_ID	CLASS_ATTR	
000	OBJECT			0
001	LOCATION	000		4
002	BOX	001		6
003	STRING	001		6
...
@ATTRIBS.DBF:				
CLASS_ID	ATTR_NAME	ATTR_TYPE	ATTR_LEN	ATTR_DEC
001	X	N	2	0
001	Y	N	2	0
001	INIT	I	2	001
001	MOVE	F	2	002
002	H	N	2	0
002	W	N	2	0
002	TYP	C	9	0
002	INIT	I	5	001
002	MOVE	F	2	002
002	CLEAR	F	0	003
...

4.2. OBJECTS IN MEMORY

For a proper object manipulation Clip++ supports a memory structure (`_C_TABLE_`) describing the classes used. In the terms of Clipper 5.0 it is a 2-dimensional array, but some of its elements are also 2-dimensional arrays. It is possible to read all class definitions into memory. If this is not done, when an attempt is made to use a class, its description is added to the structure. This slows down the system when a class is accessed for the first time, but as only the

necessary class descriptions are loaded into `_C_TABLE_`, the look-up in it is faster and less memory is used.

The `_C_TABLE_` structure describing the classes in memory is the following:

	ClassNAME	ClassID	ClassMETHOD	ClassDATA	ClassPID	
Type:	<char-11>	<char-3>	<array[3,x]>	<array[3,x]>	<char-3>	
Exam:	LOCATION	001	*	*	000	
		/	/		
	Mtd.NAME	Mtd.ID	Para#	DataNAME	DataTYPE	Orig.CID
Type:	<char-15>	<char-9>	<num-2>	<char-15>	<char-1>	<char-3>
Exam:	Move	F00100202	2	X	N	001
		

ClassPID — the CLASS Parent Identifier;

Orig.CID — the Class Identifier, where the attribute is originally defined (it can be inherited);

Mtd.ID — internal (memory only) Method Identifier; consists of: method type ('F'unction or 'I'nitializer), class identifier (3 characters), method identifier (3 characters) and number of expected parameters (2 characters);

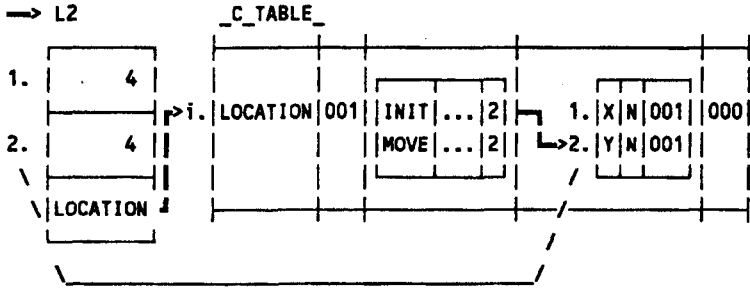
DataTYPE — Attribute TYPE: C, N, D, L, M, O: nnn, where nnn is the identifier of the class of which the nested object is.

When a new class description must be loaded into `_C_TABLE_`, the following actions take place. First, the parent class (if any) is determined and if necessary loaded recursively into memory. Second, its description is appended (doubled) as last element of the structure. This ensures the inheritance of all its attributes and methods. At the end, the descriptions of the elements, defined in the class itself, are read and if they overlap existing elements, the new definitions replace the old ones (ensuring the polymorphism), else they are added to the sub-arrays describing the methods or the attributes.

4.3. MEMORY REPRESENTATION OF OBJECT VALUES

The objects themselves are represented in memory as arrays with one element more than the number of their attributes. In Clipper 5.0 each array element can be of different type, even another array. Using this feature, the value of each attribute of an object is kept in a certain element of the array representing that object. The array takes the name of the object and is directly accessed using it. The attribute name descriptions and their types are kept in the `_C_TABLE_`, from where the access to the corresponding attribute values takes place. The last element of the array is the object class name.

The access to a specific attribute of an object is done as follows. First, using the class name (the last array element) the class description in `_C_TABLE_` is located. Then in the attribute description sub-array the specific attribute name is found. Its index is the index of the element in the array, where the attribute value is stored.



To ensure the encapsulation of the objects, their values can be accessed only through the methods of the corresponding class.

The access of the methods is absolutely identical: from the class name (last array element) and the method name the appropriate function is called. This automatically implements the late binding and the polymorphism.

4.4. MESSAGE SENDING

To distinguish the objects from the memory variables, their names are preceded by a colon ("`:`"). For example:

```
:L2:Move(10,10) // a message Move(10,10) to the object L2
:L1 := L2      // assigns object L2 to L1 (":") in front of
               // the second object are not compulsory.
```

The construction `<identifier>` is recognized by the preprocessor and the above example is translated to the functions:

```
_Obj_MExec_( L2, "Move", 10, 10 )
_Obj_Assign_( L1, L2 )
```

The format of sending messages to objects is the following:

```
<object_name>:<method_name>{( <param_list> )}
<object_name1> {:}= {:}<object_name2>
```

Here the curly brackets designate that the expression within them can appear not more than once. The `<param_list>` may be empty.

The message sending to a nested attribute-object is similar but the object name is quoted as an attribute (details in 3.3.):

```
.<obj_attr>:<method_name>{( <parameter_list> )}
```

When passing an object as a function argument the colon is not compulsory:

```
.....
Func1( L1 ) // equivalent to funct1( :L1 )
:02:Method2( L1 ) // equivalent to :02:Method2( :L1 )
.....
```

4.5. OBJECTS INTO RELATIONS

When defining a new class Clip⁺⁺ creates a database file named with the first 8 characters of the class name and with the following attributes: one attribute for each class attribute with the same names and one additional attribute called `_OID_` (object identifier). The object identifier is generated by Clip⁺⁺ upon saving a new object in secondary storage and has unique value for the whole system. It is in the range from 1 to $36^3 - 1 = 46655$ (*ZZZ* as a 36-decimal number). Therefore, up to 46 655 objects can be saved in secondary storage at the same time. The increase of that number is only a technical problem.

The objects of each class are saved in as many files as the number of the superclasses of the class plus one for the class itself is. This may seem rather clumsy but gives some benefits, for example: easy overlapping of attributes, easy transformation of an object from one class to another, much easier and faster look-up, objects of all subclasses of a class can be treated as pertaining to the parent class. The last one means that if the *X*-coordinate of all `LOCATION` objects is increased by one, the same will happen to all objects of the subclasses `BOX` and `STRING`. Looking back to the `LOCATION` and `BOX` classes, the following relational schemas will be created:

```
LOCATION ( _OID_, X, Y )
BOX      ( _OID_,      H, W, TYP )
```

Note: The root class has at least `_OID_` attribute.

Each object in secondary storage is decomposed into its attributes which are saved in the file corresponding to the class where they are originally defined. For example, the object *B* of class `BOX`: *B*(*X*=4, *Y*=5, *H*=10, *W*=20, *TYP* ='-'), goes into 3 files:

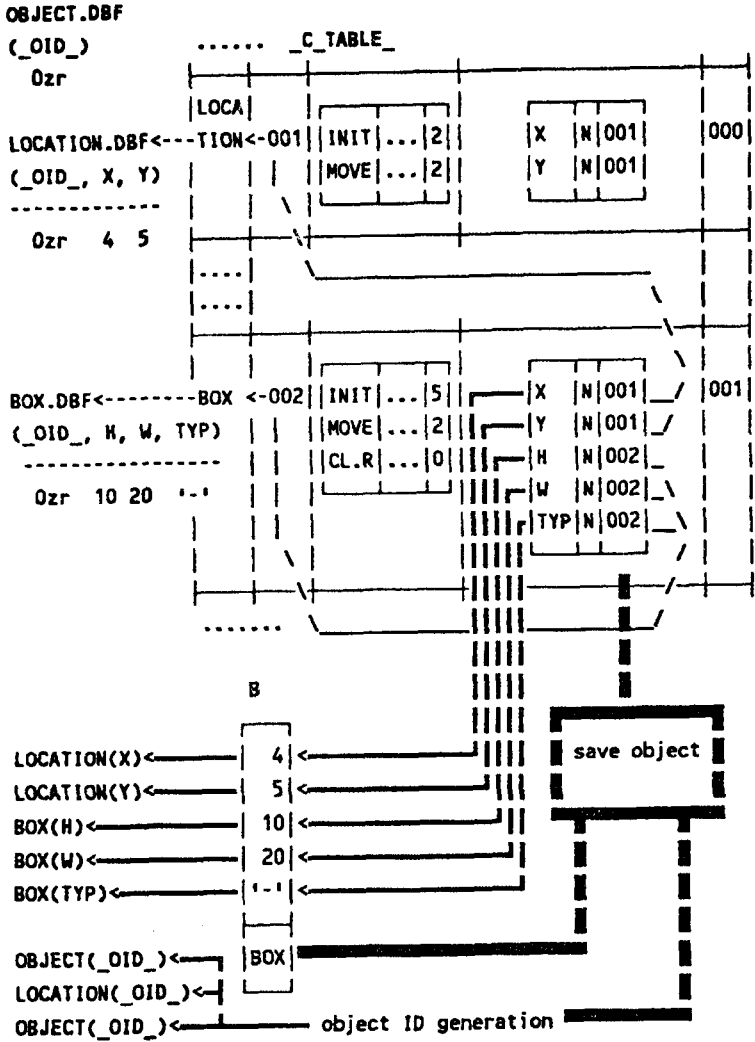
```
OBJECT (_OID_)   LOCATION (_OID_, X, Y)   BOX (_OID_, H, W, TYP)
-----
...
Ozr              Ozr  4  5                Ozr  10 20  '-'
```

When an object is read from secondary storage into memory, first a selection of `_OID_` (it is unique) is performed and then a join on `_OID_` of all relations is build of. The resulting tuple is put into the object structure (array) together with the class name as last element.

```

      _OID_ X Y H W TYP
      -----
OBJECT   Ozr
LOCATION  Ozr  4 5
BOX      Ozr      10 20  '-'
```

An object is saved in secondary storage in much the same way: it is decomposed into tuples (of attributes defined in the same class together with an object identifier) and saved in the corresponding file. Let *B* is the above object of class `BOX`. It is saved in the following way: each attribute is checked, where it is originally defined, and using the class name the database file is determined (see the following scheme).



4.6. LOCATING OBJECTS

The location of objects in secondary storage by the values of their attributes uses one specific feature of Clipper 5.0: each element of an array can be of any type including code block. So to solve the contradiction between the object encapsulation and the direct access of the data in the relations, the notion functional object is introduced in Clip⁺⁺. A functional object has as many attributes as the corresponding object and it is declared in the same way, but instead of values contains code blocks that are Boolean expressions on the corresponding attributes. Thus the requirement for object encapsulation is fulfilled and at the same time an object

can be located by the values of its attributes. The functional object is used in the object locating commands. For each object in the secondary storage the Boolean expressions are calculated and if they are true, the desired object is found.

In the subsequent command formats the curly brackets designate that the expression can appear not more than once.

The object locating command is :

```
LOCATE OBJECT FOR <fobjfor> WHILE <fobjwhile>
    {NEXT <next>} {<rest:REST>}
```

Example:

```
Private :LOCATION L4( {!x| x>5 .and. x<10}, {!w| w # z} )
LOCATE OBJECT FOR :L4
```

The argument of the code block is always the corresponding attribute, no matter what its name is. In the above example the 'x' argument represents the 'X' attribute and the 'w' argument represents the 'Y' attribute, because the Boolean expression occupies the 'Y' attribute place. The 'z' is a memory variable.

Objects are added in the database with the command:

```
APPEND {OBJECT} :<obj>
```

Objects replace other objects with the commands:

```
REPLACE {CURRENT} {OBJECT} WITH :<obj>
REPLACE OBJECT <oid> WITH :<obj>
```

In the first format the object replaces the "current" object. (Clip++ supports "current" object and "default" class. They are usually the last accessed object and class.) In the second format an object with a definite identifier is replaced.

The object is read into memory using a function:

```
<object_name> := ReadObject( { <object_identifier> } )
```

A "blank" object is added with the commands:

```
APPEND {BLANK} OBJECT // of current class
APPEND {BLANK} OBJECT OF CLASS <class>
```

Skipping < n > objects from the default class is done by the command:

```
SKIP OBJECT {<n>}
```

The current object can be deleted using:

```
DELETE OBJECT
```

LOCATE in combination with other commands can perform group operations.

For example:

```
Do While ! Eof ()
    LOCATE OBJECT FOR :L4 REST
    DELETE OBJECT
EndDo
```

deletes all the objects matching the functional object :L4.

The above database commands can be made object-oriented. One approach is to add some predefined methods to the root class OBJECT. Let us note that the object itself can be accessed from within its methods by the name "_a_" (in most OO languages it is "self" or "this"). The only thing these methods would do is to execute the corresponding database command. For example:

```

:<obj>:Append()           <=> APPEND [OBJECT] :<obj>
:<obj>:Replace(<oid>)    <=> REPLACE OBJECT <oid > WITH :<obj>
:<obj>:Read({<oid>})    <=> <obj> := ReadObject( {<oid>} )

```

Another approach for object-orienting of the commands is to introduce a special class (`dbaseclass`) with an instance (`dbaseobj`). The methods of that class can implement the database commands by just executing them. For example:

```

:dbaseobj:Append(<obj>)  <=> APPEND [OBJECT] :<obj>
:dbaseobj:Skip( {<n>} ) <=> SKIP OBJECT {<n>}
:dbaseobj>Delete()      <=> DELETE OBJECT

```

This is a more universal approach, but more complicated. Both of them can be easily implemented using the Clip++ features.

REFERENCES

- [Gar 89] Gardarin, G., et al. Managing Complex Objects in an Extensible Relational DBMS. — Proc. of the 15th International Conf. on VLDB, 1989, 55-65.
- [Ong 84] Ong, J., et al. Implementation of Data Abstraction in the Relational Database System Ingres. SIGMOD, rec. 14, 1984, 1-14.
- [Osb 86] Osborn, S., T. Heaven. The Design of Relational Database System with Abstract Data Types for Domains. — ACM Transactions of Database Systems, 11, No 3, Sept. 86, 357-373.
- [Unl 90] Unland R., G. Schiageter. Object-Oriented Database Systems: Concepts and Perspectives. LNCS 466, Database Systems of the 90's, A. Biases (Ed.), 154-197.

Received 12.06.1992

ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 2 — МЕХАНИКА

Том 85

1991

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
“ST. KLIMENT OHRIDSKI”

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

LIVRE 2 — MÉCANIQUE

Tome 85

1991

СОФИЯ, 1993, SOFIA
УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
PRESSES UNIVERSITAIRES “ST. KLIMENT OHRIDSKI”

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

проф. *ЛЮБОМИР ЛИЛОВ* (главен редактор), проф. *ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ*,
проф. *КОНСТАНТИН МАРКОВ*, доц. *ИВАН МИХОВСКИ*,
гл. ас. *СОНЯ ДЕНЕВА* (секретар)

BIFURCATIONS OF INVARIANT MANIFOLDS IN A MODEL IN THE RIGID BODY DYNAMICS

OGNYAN CHRISTOV

Огнян Христов. БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ОДНОМ МОДЕЛЕ В ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена механическая модель, обобщающая классическая задача о движении твердого тела. Изолирован интегрируемый случай. Описаны топология множества уровня интегралов и все бифуркации Лиувилевых торов и цилиндров.

Ognyan Christov. BIFURCATIONS OF INVARIANT MANIFOLDS IN A MODEL IN RIGID BODY DYNAMICS

A model, generalizing the rigid body problem is considered. An integrable case is isolated. The topology of the real level sets of the motion constants and all bifurcations of the Liouville tori and cylinders are described.

1. INTRODUCTION

Consider the following mechanical problem. A particle, hanged up on a spring, is oscillating in a symmetric heavy body with a fixed point along the axis of symmetry. This is a conservative system with four degrees of freedom. Consider the motion of this system without external forces. It can be described via the Lagrangian [1]

$$(1.1) \quad L = \frac{1}{2} \left\{ (A + mr^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right\} + mr\dot{r}^2 - \sigma r^2 \}.$$

Here ψ , θ , φ are the Euler angles, m is the mass of the particle, r — the deviation

of the particle from the fixed point, σ — the stiffness of the spring and the C , A are the inertia moments about the symmetry axis and in the orthogonal plane, respectively. In the next section we shall show that the system (1.1) is completely integrable.

The purpose of this paper is to classify all real level sets. According to the classical Liouville–Arnold theorem [2], we may expect that they are consist of tori, cylinders and planes. In recent papers [3], [4] the generic bifurcations of invariant manifolds are studied for generalized Henon–Heiles system and Gelfand–Dikii system respectively, using their algebraic structure. In quite different way Kharlamov [5] studied the bifurcations of integrable cases of rigid body problem.

However, our case is more simple than others mentioned above. First, the problem is integrated in elliptic functions and, second, the variables are directly separated. So, after reducing the system to two degrees of freedom, in order to study real level sets, it is sufficient to draw the graphs of the effective potentials. Then the real level sets are merely the product of the real level sets of the corresponding integrals.

2. EQUATIONS OF MOTION AND INTEGRALS

Let us simplify the problem. First, let us get rid of unessential constants. After changes of the variables $t \Rightarrow t\sqrt{A}$ and $r \Rightarrow r\sqrt{m/A}$ and denoting $s = \sigma A/m$, $\tilde{C} = C/A$, the Lagrangian (1.1) becomes

$$(2.1) \quad L = \frac{1}{2} \left\{ (1+r^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \tilde{C}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right\} + \dot{r}^2 - sr^2.$$

It is obvious that ψ and φ are cyclic coordinates. Then the corresponding integrals of motion are:

$$(2.2) \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (1+r^2) \dot{\psi} \sin^2 \theta + \tilde{C} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = a = \text{const.}$$

$$(2.3) \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \tilde{C} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = b = \text{const.}$$

Second, in order to reduce the system to two degrees of freedom, consider the Routh's function — $R = L - a\dot{\psi} - b\dot{\varphi}$. Simple calculations give

$$R = \frac{1}{2} \left[(1+r^2)\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - sr^2 - \frac{(a-b\cos\theta)^2}{(1+r^2)\sin^2\theta} \right].$$

Note that the Routh's function has the Lagrangian form $R = T^* - \Pi^*$. The corresponding Hamiltonian system is defined via the Hamiltonian

$$(2.4) \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{sr^2}{2} + \frac{1}{2(1+r^2)} \left[p_\theta^2 + \frac{(a-b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \right],$$

where $p_r = \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$, $p_\theta = \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = (1+r^2)\dot{\theta}$ and $H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - R$ (the Legendre transformation). There are no problems in deriving the equations of the reduced

(two degrees of freedom) system. We shall consider a and b as parameters. The corresponding Hamilton-Jacobi equation to the system (2.4) obviously separates. If we denote

$$f = p_\theta^2 + \frac{(a - b \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta},$$

we obtain the following first integrals in involution:

$$(2.5) \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{sr^2}{2} + \frac{f}{2(1+r^2)} = h,$$

$$(2.6) \quad F = p_\theta^2 + \frac{(a - b \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = f, \quad \text{where } 0 < \theta < \pi.$$

Note that h, f are always ≥ 0 . In the particular case, when $a = b = 0$, the integrals become

$$(2.7) \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{sr^2}{2} + \frac{f^2}{2(1+r^2)} = h \geq 0,$$

$$(2.8) \quad F = p_\theta = f, \quad f \text{ arbitrary.}$$

3. TOPOLOGICAL ANALYSIS

In this section we shall describe the topological type of the real invariant manifold

$$M = \{H = h, F = f\} \subset \mathbb{R}^4.$$

This means (in the context of the present work) that we have to describe

- (i) the topological type of M for all values of the constants a, b, f, h ,
- (ii) how the sets M , fit topologically as a, b, h, f , vary to make up $\mathbb{R}^4(\theta, r, p_\theta, p_r)$.

As it is seen in the previous section, our (reduced) system of two degrees of freedom splits into two one degree of freedom systems. Then the topology of M can be easily described by the product of phase portraits of these systems. The topology of one degree of freedom system can be obtained by investigating the graph of the potential of the system [2]. Of course, topological type may change only in the critical point of the corresponding potential.

Consider first the integral (2.6). Let

$$L(\theta) = \frac{(a - b \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \quad 0 < \theta < \pi,$$

be a potential of the system. Simple calculations give the shape of the graph of $L(\theta)$ in different cases for a and b (Fig. 1 (a), (b), (c), (d), (e)).

The analysis of the above cases shows that the (a, b) -plane is divided into the following domains: I — $a = b = 0$, II — $\frac{|a|}{|b|} = 1$, III — $\frac{|a|}{|b|} \neq 1$ (Fig. 2). It is seen that only in the domain III there exist ovals (closed phase curves), but in domain I, II there exist only lines.

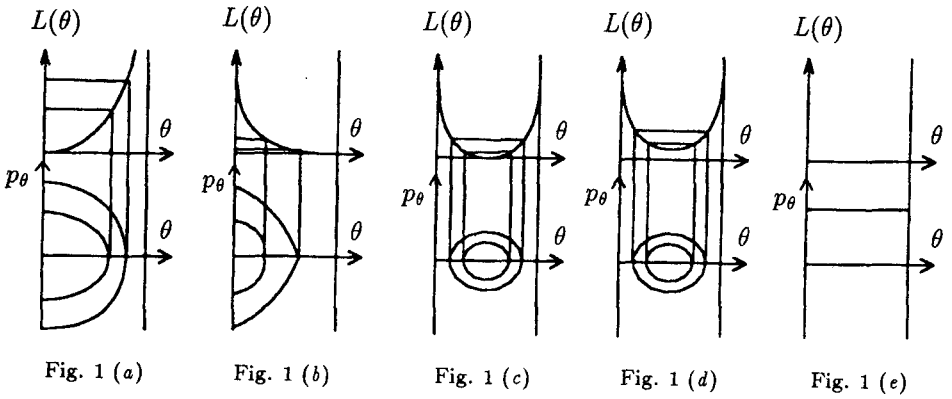


Fig. 1 (a)

Fig. 1 (b)

Fig. 1 (c)

Fig. 1 (d)

Fig. 1 (e)

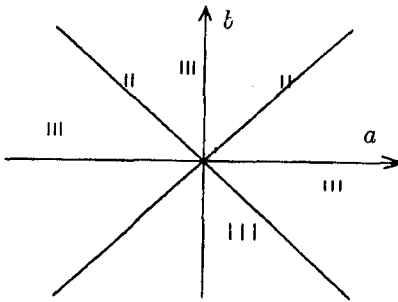


Fig. 2

Now consider the integral (2.5). Denote by $V(r)$ the effective potential

$$V(r) = \frac{sr^2}{2} + \frac{f}{2(1+r^2)}.$$

Simple calculations give the shape of the graph of $V(r)$ for different cases for f (Fig. 3 (a), (b), (c)).

Consider the set of critical values of the integrals (2.5) and (2.6) in the (h, f) plane. One should note that in these values integral becomes dependent,

i. e. $dH \wedge dF = 0$. Then combining the information of Fig. 1 and Fig. 3, we may see what is the type of the invariant manifold in concrete domain (Fig. 4). Denote by \mathbb{T} , \mathbb{C} two dimensional torus and cylinder, respectively, by S^1 , L the circle and line, respectively, and $\mathbb{T} \cdot \mathbb{T}$ ($\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}$) denotes two stucked tori (cylinders).

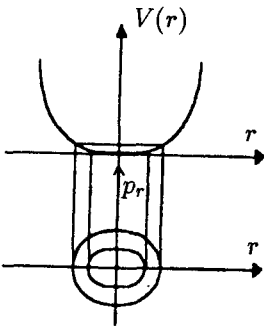


Fig. 3 (a)

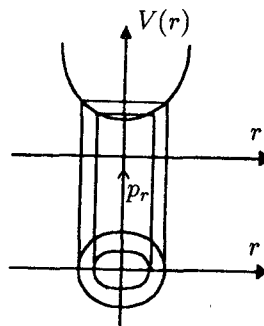


Fig. 3 (b)

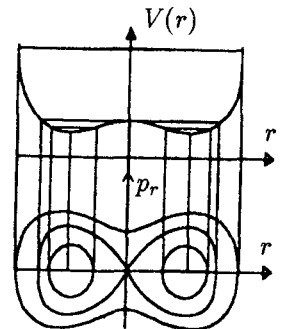


Fig. 3 (c)

So, we have

Proposition 1. All possible types of invariant manifold M are described in Table I and Fig. 4.

Table I

Domain	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Type of M	0	$2S^1$	$2T$	$T.T$	T	S^1	C	$C.C$	$2C$	$2L$	L

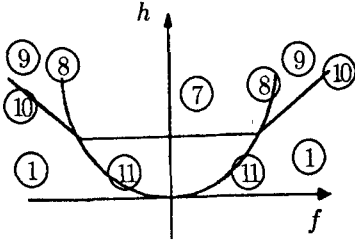


Fig. 4 (a) $a = b = 0$

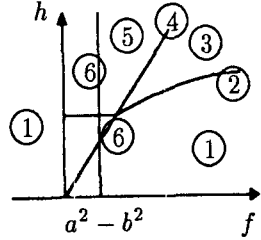


Fig. 4 (b) $\left| \frac{a}{b} \right| > 1$

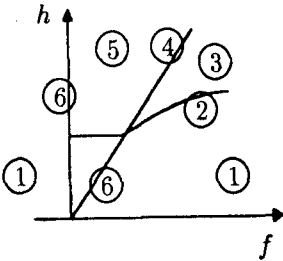


Fig. 4 (c) $\left| \frac{a}{b} \right| < 1$

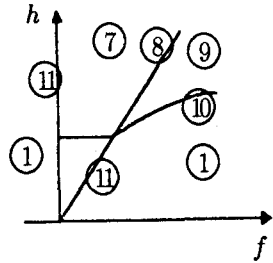


Fig. 4 (d) $|a| = |b| = 1$

Having in hand all information from Table I and Fig. 4, it is easy to describe all generic bifurcations when a, b, f, h vary.

Consider the following bifurcations:

- (i) $T \Rightarrow 0$: the torus collapses along its "axes" — the S^1 , and then vanishes, i. e. $T \Rightarrow S^1 \Rightarrow 0$,
- (ii) $2T \Rightarrow 0$: i. e. $2T \Rightarrow 2S^1 \Rightarrow 0$,
- (iii) $C \Rightarrow 0$: i. e. $C \Rightarrow L \Rightarrow 0$,
- (iv) $2C \Rightarrow 0$: i. e. $2C \Rightarrow 2L \Rightarrow 0$,
- (v) $C \Rightarrow 2C$ (Fig. 5a),
- (vi) $T \Rightarrow 2T$ (Fig. 5b),

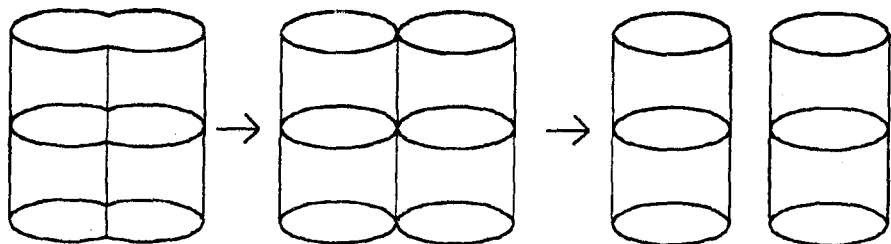


Fig. 5 (a)

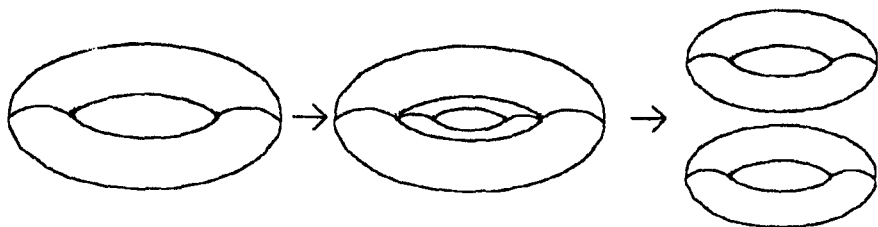


Fig. 5 (b)

(vii) $T \Rightarrow C$ ($2T \Rightarrow 2C$) when in Fig. 2 *a, b* cross the line $|a| = |b|$.

If $M_1 \Rightarrow M_2$ is an already defined bifurcation, then we denote by $M_2 \Rightarrow M_1$ the “inverse” bifurcation.

So, we have the obvious

Proposition 2. Any generic bifurcation of connected components of the invariant manifold M can be found among the bifurcations (i)—(vii). The precise description of all generic bifurcations of M is given in Table II.

Table II

$1 \Rightarrow 5$	$1 \Rightarrow 7$	$1 \Rightarrow 3$	$1 \Rightarrow 9$	$3 \Rightarrow 5$	$9 \Rightarrow 7$
$0 \Rightarrow T$	$0 \Rightarrow C$	$0 \Rightarrow 2T$	$0 \Rightarrow 2C$	$2T \Rightarrow T$	$2C \Rightarrow C$

ACKNOWLEDGEMENT. Acknowledgements are due to Ivan Dimitrov for non-formal discussion.

REFERENCES

1. Pyatnitskii, E. et al. Collection of problems on analytical mechanics. Moscow, 1980 (in Russian).
2. Arnold, V. Mathematical methods in classical mechanics. Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

3. G a v r i l o v, L. Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Henon-Heiles system. — *Physica D* **34**, 1989, 223–239.
4. D i m i t r o v, I. Bifurcations of invariant manifolds in the Gelfand-Dikii system. — *Physics Letters A* **163**, 1992, 286–292.
5. K h a r l a m o v, M. Topological analysis of integrable problems in rigid body dynamics. Leningrad University, 1988 (in Russian).

Received 10.04.1992

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 85, 1991

ЧАСТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРА, КАТЯЩЕГОСЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

СОНЯ ДЕНЕВА

Соня Денева. ЧАСТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ШАРА, КАТЯЩЕГОСЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

В работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности под действием его тяжести.

Sonia Deneva. PARTICULAR MOVEMENTS OF ROLLING SPHERE ON ABSOLUTELY ROUGH TORE

In this paper are considered some aspects of the classical unholonomic problem about rolling sphere on absolutely rough surface under the action of weight.

В настоящей работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности под действием его тяжести. В этой задаче имеются девять неизвестных — координаты x_G , y_G , z_G центра тяжести G шара, углы Эйлера φ , θ , ψ подвижного триэдра, неизменно связанного с шаром и компоненты реакции поверхности N , действующих на шар. Требование, чтобы тело не покидало поверхность, ведет к тому, что координаты центра G зависят от двух параметров, откуда имеем пять независимых параметров. Условия качения без скольжения редуцируются до двух зависимостей между обобщенными скоростями, так что остаются три независимых параметра, для определения которых можно взять три уравнения неголономной динамики, например, уравнения Аппеля. Компоненты неизвестной реакции

определяются из уравнений движения центра тяжести G шара.

Пусть $G\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ соответственно подвижная, связанная с движущимся телом с началом в его центре масс G , и неподвижная системы координат, A, B, C — главные моменты инерции шара, p, q, r — проекции угловой скорости ω тела на оси подвижной системы координат. Обозначим через m и a массу шара и его радиус, $n^0(n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор внешней нормали в точке P соприкосновения шара с поверхностью качения. Пусть $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ и R_x, R_y, R_z — проекции соответственно угловой скорости Ω поверхности качения и радиус-вектора R точки P той же поверхности относительно неподвижных осей.

1. НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА ПО РАВНОМЕРНО-ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

Из формулы для скорости точки абсолютно твердого тела имеем

$$(1) \quad v_P = v_G + \omega \times GP,$$

где как и выше G — центр тяжести тела, P — точка соприкосновения шара с поверхностью. Принимая, что рассматриваемая поверхность вращается, получим

$$(2) \quad v_P = \Omega \times R_P.$$

Так как n^0 общий нормальный вектор для обеих соприкасающихся поверхностей, будем иметь

$$(3) \quad GP = -an^0.$$

Из (1), (2) и (3) находим неголономную связь

$$(4) \quad v_G = a(\omega \times n^0) + \Omega \times R_P.$$

Когда опорная поверхность неподвижна $v_P = 0$, т. е. для точки соприкосновения шара имеем качение без скольжения.

Уравнения движения шара находим из уравнений Аппеля в квазиординатах

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

где S энергия ускорений шара, Q_j — обобщенные силы, s — число степеней свободы.

Для квазиординат выберем проекции угловой скорости шара на оси координат подвижной системы, т. е.

$$(6) \quad \dot{\pi}_1 = p, \quad \dot{\pi}_2 = q, \quad \dot{\pi}_3 = r.$$

В нашем случае число степеней свободы $s = 3$, так как с помощью неголономных связей (4) можно исключить два параметра, определяющих

положение центра масс, в результате которого остаются три независимые параметра. Таким образом можно задать положение шара тремя углами Эйлера φ , θ и ψ , входящие в квазикоординатах (6).

Энергия ускорения S равна [1]

$$(7) \quad S = \frac{mw_G^2}{2} + S',$$

где S' определяется выражением

$$(8) \quad S' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \dot{p}qr(C - B) + \dot{q}rp(A - C) + \dot{r}pq(B - A) + \dots$$

Здесь опущены члены, не содержащие \dot{p} , \dot{q} и \dot{r} . При помощи (4) находим

$$(9) \quad \begin{aligned} w_G^2 &= a^2\dot{\omega}^2 - a^2(\dot{\omega} \cdot n^0)^2 - 2a^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(\omega \cdot n^0) \\ &+ 2a(\dot{\omega} \cdot \Omega)(n^0 \cdot \dot{R}) - 2a(\dot{\omega} \cdot \dot{R})(\Omega \cdot n^0) + \dots \end{aligned}$$

Здесь принимается, что Ω постоянный вектор, т. е. поверхность качения вращается равномерно. Здесь многоточием обозначены члены, не содержащие $\dot{\omega}$. Обобщенные силы Q_j определяются по формулам [2]

$$(10) \quad Q_j = \sum_{\nu=1}^N F_{\nu} a_{\nu j},$$

где F_{ν} — внутренние силы, действующие на систему. В рассматриваемом случае имеется только одна такая сила — сила тяжести

$$(11) \quad F = -mgk.$$

Здесь i, j, k — орты неподвижной системы $Oxyz$. Векторы $a_{\nu j}$ определяются по формулам [2, стр. 895]

$$(12) \quad v_{\nu} = \sum_{j=1}^3 a_{\nu j} \dot{\pi}_j + a_{\nu}.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$(13) \quad v_{\nu} = v_G + \omega \times \rho_{\nu},$$

где $\rho_{\nu} = \xi_{\nu}\xi^0 + \eta_{\nu}\eta^0 + \zeta_{\nu}\zeta^0$ — радиус-вектор произвольной точки шара. Принимая в виду, что

$$\omega = \dot{\pi}_1\xi^0 + \dot{\pi}_2\eta^0 + \dot{\pi}_3\zeta^0$$

из (4), (12) и (13) находим

$$(14) \quad \begin{aligned} a_{\nu 1} &= a(\zeta^0 n_{\eta} - \eta^0 n_{\zeta}) + \zeta^0 \eta_{\nu} - \eta^0 \zeta_{\nu}, \\ a_{\nu 2} &= a(\xi^0 n_{\zeta} - \zeta^0 n_{\xi}) + \xi^0 \zeta_{\nu} - \zeta^0 \xi_{\nu}, \\ a_{\nu 3} &= a(\eta^0 n_{\xi} - \xi^0 n_{\eta}) + \eta^0 \xi_{\nu} - \xi^0 \eta_{\nu}. \end{aligned}$$

Здесь ξ^0, η^0, ζ^0 — орты системы $G\xi\eta\zeta$, n_ξ, n_η, n_ζ — компоненты вектора n^0 относительно тех же подвижных осей. Подставляя (14) в (10), согласно (11) получим

$$(15) \quad Q_1 = mga(k \times n^0)\xi^0, \quad Q_2 = mga(k \times n^0)\eta^0, \quad Q_3 = mga(k \times n^0)\zeta^0,$$

где приняты во внимание зависимости

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \xi_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \eta_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \zeta_\nu = 0,$$

которые следуют из условий, что центр масс G шара совпадает с его геометрическим центром. Согласно (7), (8), (9) и (15) из (5) находим уравнения движения шара

$$(16) \quad \begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr + ma^2\dot{p} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \xi^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \xi^0) \\ + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \xi^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \xi^0) = mga(k \times n^0)\xi^0, \\ B\dot{q} - (C - A)rp + ma^2\dot{q} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \eta^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \eta^0) \\ + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \eta^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \eta^0) = mga(k \times n^0)\eta^0, \\ C\dot{r} - (A - B)pq + ma^2\dot{r} - ma^2(\dot{\omega} \cdot n^0)(n^0 \cdot \zeta^0) - ma^2(\omega \cdot n^0)(\dot{n}^0 \cdot \zeta^0) \\ + ma(n^0 \cdot \dot{R})(\Omega \cdot \zeta^0) - ma(\Omega \cdot n^0)(\dot{R} \cdot \zeta^0) = mga(k \times n^0)\zeta^0. \end{aligned}$$

Из (16) в частности можно получить уравнения движения шара для случая когда опорная поверхность неподвижна, т. е. $\Omega = 0$.

Реакция поверхности опоры на шаре определяется из уравнения

$$(17) \quad mw_G = -mgk + N.$$

Из (17) находим, что компонента N на общей нормали двух поверхностей N_u определяется из формулы

$$(18) \quad N_u = mw_G \cdot n^0 + mg(k \cdot n^0).$$

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТОРА

Тор поверхность вращения, которую можно определить как поверхность, порожденная вращением окружности около прямой линии, которая лежит в ее плоскости, но ее не пересекает. Пусть эта окружность расположена на координатной плоскости Ouy и Oz ее ротационная ось (рис. 1). Обозначим через R_1 расстояние OO_1 , где O_1 — центр окружности, а R_2

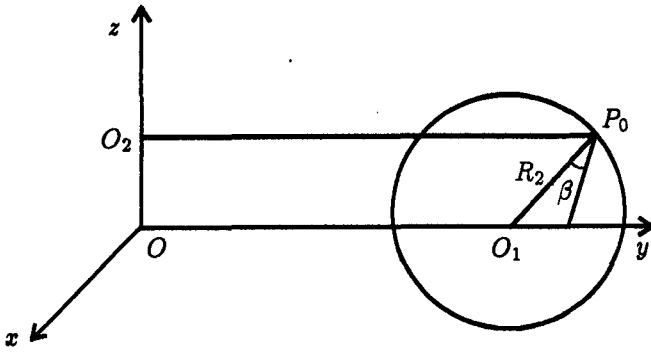


Рис. 1

— ее радиус. Если P_0 точка окружности, то очевидно имеем

$$z_{P_0} = R_2 \cos \beta,$$

где β — угол (O_1z, O_1P_0) .

Когда окружность вращается около оси Oz , точка P_0 описывает окружность с центром O_2 . Для расстояния O_2P_0 имеем

$$O_2P_0 = R_1 + R_2 \sin \beta.$$

Очевидно, P_0 описывает окружность на торе с параметрическими уравнениями относительно координатной плоскости Oxy вида

$$x = (R_1 + R_2 \sin \beta) \cos \alpha,$$

$$y = (R_1 + R_2 \sin \beta) \sin \alpha,$$

где α угол между осью Ox и прямой линией O_2P . Точка P лежит на торе и, следовательно, его параметрические уравнения будут

$$x = (R_1 + R_2 \sin \beta) \cos \alpha,$$

$$(19) \quad y = (R_1 + R_2 \sin \beta) \sin \alpha,$$

$$z = R_2 \cos \beta.$$

Непосредственно видно, что единичный внешний вектор нормали поверхности (19) имеет вид

$$(20) \quad n^0 = \cos \alpha \sin \beta i + \sin \alpha \sin \beta j + \cos \beta k,$$

где $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, 2\pi)$.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА ПО НЕПОДВИЖНОМ И РАВНОМЕРНО КРУТЯЩЕМСЯ ТОРЕ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Рассмотрим движение неоднородного и в частности однородного шара на торе, когда точка соприкосновения шара описывает параллель на торе, т. е. когда $\beta = \text{const}$.

Центр шара определяем из уравнения

$$(21) \quad r_G + r_P + an^0,$$

откуда для координат G получаем согласно (19) и (20)

$$(22) \quad \begin{aligned} x_G &= [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] \cos \alpha, \\ y_G &= [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] \sin \alpha, \\ z_G &= (R_2 + a) \cos \beta. \end{aligned}$$

Предположим, что тор равномерно вращается около вертикальной оси, т. е.

$$(23) \quad \Omega = \Omega k, \quad \Omega > 0.$$

Неголономные связи, проектированные на неподвижные оси согласно (4), (20), (21) и (23) имеют вид

$$(24) \quad \begin{aligned} v_{G_x} &= a(\cos \beta \omega_y - \sin \alpha \sin \beta \omega_z) - \Omega \sin \alpha (R_1 + R_2 \sin \beta), \\ v_{G_y} &= a(\cos \alpha \sin \beta \omega_z - \cos \beta \omega_x) + \Omega \cos \alpha (R_1 + R_2 \sin \beta), \\ v_{G_z} &= a \sin \beta (\omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha), \end{aligned}$$

где компоненты вектора ω определяются из формул Эйлера

$$(25) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Имея ввиду, что $v_{G_x} = \dot{x}_G$, $v_{G_y} = \dot{y}_G$, $v_{G_z} = \dot{z}_G$ из (22) и (24) находим зависимость для случая $\beta = \text{const}$:

$$(26) \quad \dot{\theta} \sin(\alpha - \psi) + \dot{\varphi} \sin \theta \cos(\alpha - \psi) = 0.$$

Рассмотрим некоторые частные движения шара, соответствующие зависимости (26).

СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ НУТАЦИИ ПОДВИЖНОГО ТРИЭДРА

Здесь принимаем, что $\theta = \theta_0 = \text{const}$, т. е. $\dot{\theta} = 0$. Тогда (26) удовлетворяется при

$$(27) \quad \alpha = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

Из (27) и $\dot{x}_G = v_{G_x}$ согласно (20) и (22) получаем

$$(28) \quad \dot{\psi} = \nu \dot{\varphi} + \Omega,$$

где $\nu = \frac{a \sin(\theta_0 + \beta)}{R_1 + R_2 \sin \beta}$ — постоянная величина. Покажем, что при динамической симметрии шара, т. е. в случаях когда $A = B$, угловые скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ постоянные. Для этой цели исходим из кинетического момента K_P шара относительно точки касания P , для которого имеем

$$(29) \quad \frac{dK_P}{dt} = PG_x(-mgk).$$

Умножая (29) на k , получим интеграл кинетического момента

$$(30) \quad K_P k = C_1 = \text{const.}$$

Из дефиниции кинетического момента имеем

$$(31) \quad K_P = K_G + m(GP \times v_G) = Ap\xi^0 + Bq\eta^0 + Cr\zeta^0 + ma(v_G \times n^0).$$

Согласно (4) и (31) из (30) находим

$$(32) \quad Aa\rho a_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} + ma^2 \cos \beta (\omega \cdot n^0) - ma^2 \omega_z = C_1.$$

При $A = B$ согласно (24), (27) и (28) из (32) непосредственно получаем, что $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ постоянные. Рассмотрим уравнения Аппеля (16) для этого частного движения. Из (25) для этого случая имеем

$$(33) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta_0 \sin \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta_0 \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Согласно (33) и (20) получим

$$(34) \quad (\dot{\omega} \cdot n^0) = 0, \quad (\dot{R}_P \cdot n^0) = 0.$$

Из формул для директорных косинусов имеем

$$(35) \quad \zeta^0 = \sin \psi \sin \theta_0 i - \cos \psi \sin \theta_0 j + \cos \theta_0 k.$$

Согласно (20), (27) и (35) получим

$$(36) \quad (\dot{n}^0 \cdot \zeta^0) = 0, \quad (\dot{R} \cdot \zeta^0) = 0, \quad (k \times n^0) \cdot \zeta^0 = 0.$$

Из (34) и (36) следует, что третье уравнение Аппеля в (16) удовлетворено тождественно. Аналогичными вычислениями первое и второе уравнение в (16) редуцируются на следующую зависимость

$$(37) \quad \begin{aligned} (A + ma^2)\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta_0 + (C + A)\dot{\psi} \sin \theta_0 (\dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}) \\ + ma^2 \dot{\psi} \sin \beta [\dot{\psi} \cos \beta + \dot{\varphi} \cos(\theta_0 + \beta)] \\ + ma\Omega \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta) \dot{\psi} + mga \sin \beta = 0. \end{aligned}$$

Подставляя (28) в (37), получаем следующее уравнение для $\dot{\varphi}$:

$$(38) \quad V\dot{\varphi}^2 + Q\dot{\varphi} + W = 0,$$

где величины V , Q , W и U определяются из выражений

$$\begin{aligned} V &= \nu^2(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \nu U \\ Q &= \Omega \{2\nu(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + mav \cos \beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] + U\} \\ (39) \quad W &= \Omega^2 [(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + ma^2 \sin \beta \cos \beta + ma \cos \beta (R_1 + R_2 \sin \beta)] \\ &\quad + mga \sin \beta \\ U &= C \sin \theta_0 + mav \cos \beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta]. \end{aligned}$$

Условие чтобы ψ , определенная из (38), была реальной задается неравенством

$$(40) \quad \Delta = Q^2 - 4VW \geq 0.$$

Подставляя (39) в (40), после известных преобразований получим условие

$$(41) \quad \Omega^2 \geq \frac{4mga \sin \beta V}{C^2 \sin^2 \theta_0}.$$

Условие (41) наложит нижнюю границу для скорости Ω , после которой возможно рассматриваемое частное движение шара на внешней поверхности вращающегося тора. Другое ограничение для Ω получим из условия, что нормальная реакция N_n тора на шаре должна быть направлена по внешней нормали n^0 . Из (18) и (21) получаем

$$(42) \quad N_n = mg \cos \beta - m \sin \beta \alpha^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta].$$

Из (27), (42) и условия $N_n > 0$ находим неравенство

$$(43) \quad \psi < \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}}.$$

Согласно (28) и (38) из (43) получим

$$(44) \quad \frac{\nu \sqrt{\Delta}}{2V} + \Omega < \frac{\nu Q}{2V} + \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}},$$

где Δ определяется из (40), а V и Q из (39). Из (44) имеем необходимое условие

$$\Omega < \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{\nu Q}{2V},$$

которое ведет к ограничению для Ω

$$(45) \quad \Omega < \frac{2V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}}.$$

Из (41) и (45) следует, что по необходимости должно быть выполнено неравенство

$$(46) \quad \nu(C - A) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + C \sin \theta_0 + \frac{mav \cos 2\beta}{\cos \beta} [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] > 0,$$

которое представляет ограничение для моментов инерции неоднородного шара. Из (44) получим более сильное неравенство для Ω , а именно

$$(47) \quad \Omega < \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \nu \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}}$$

Непосредственно проверяется, что неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \nu \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}} \\ & < \frac{2V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} \end{aligned}$$

эквивалентно условию (44). В заключении имеем следующую теорему:

Теорема. Движение неоднородного шара по параллели на равномерно вращающемся и абсолютно шероховатом торе при постоянном угле нутации возможно, только когда скорость вращения тора удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \frac{2}{C \sin \theta_0} \sqrt{mag \sin \beta V} \leq \Omega \\ & < \frac{V}{\nu C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{g \cotg \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}} + \frac{mag \sin \beta}{C \sin \theta_0} \sqrt{\frac{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}{g \cotg \beta}} \end{aligned}$$

и моменты инерции подчиненные неравенству (46).

В частности, если шар однородный, (46) редуцируется на условие

$$(48) \quad \frac{2}{5} a \sin \theta_0 \cos \beta + \nu \cos 2\beta [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta] > 0.$$

Если угол параллели $\beta \leq \frac{\pi}{4}$, т. е. $\cos 2\beta \geq 0$, условие (48) выполнено для любого шара.

Если угол β удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5}, \quad \text{т. е. } \cos 2\beta < 0,$$

то (48) выполнено только для шара, у которого

$$a < (R_1 + R_2 \sin \beta) \frac{\cotg \beta}{|\cos 2\beta| \sin(\theta_0 + \beta)} \left[\frac{2}{5} \sin \theta_0 + \frac{\cos 2\beta}{\cos \beta} \sin(\theta_0 + \beta) \right]$$

и

$$\operatorname{tg} \theta_0 > \frac{\operatorname{tg} \beta |\cos 2\beta|}{0,4 + \cos 2\beta}$$

Если $\beta \geq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5}$, условие (48) не выполнено, т. е. движение по большой параллели невозможно. Эти результаты легко перенести на случай неподвижного тора. В этом случае уравнение (38) имеет вид

$$(49) \quad V\dot{\varphi}^2 + mga \sin \beta = 0,$$

где V определено из (39). Очевидно, условие для действительности $\dot{\varphi}$ $V < 0$, которое ведет к ограничению

$$(50) \quad A > \frac{C \sin \theta_0 (1 + \nu \cos \theta_0) + ma^2 [\sin \theta_0 + \nu \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos (\theta_0 + \beta)]}{\nu \sin \theta_0 \cos \theta_0}.$$

Легко видно, что (50) не удовлетворяется для однородного шара, если ????. Следовательно, в отличие от случая равномерно крутящегося тора, рассмотренное частное движение однородного шара по неподвижному тору невозможно.

Условие, чтобы нормальная реакция N_n направлена по n^0 , в этом случае выражается тоже при помощи (43), т. е. имеем

$$(51) \quad \dot{\varphi}^2 < \frac{g \cot g \beta}{\nu^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta]}.$$

Подставляя $\dot{\varphi}^2$ из (49) в (51), для момента инерции A получим более сильное ограничение

$$A > A_0 + \frac{ma^2 \sin \beta}{\nu \sin \theta_0 \cos \theta_0},$$

где A_0 правая сторона выражения (51).

Замечание. Частное движение шара по тору при постоянном угле нутации подвижного триэдра рассмотрено при наличии динамической симметрии относительно оси $G\zeta$, т. е. при $A = B$. Исходя из интеграла для кинетического момента (32) и третьего динамического уравнения (16), можно показать, что такое движение единственно возможно при $A = B$, т. е. последнее условие не только достаточно, но и необходимо.

СЛУЧАЙ ПОСТОЯННЫХ УГЛОВ НУТАЦИИ И СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ТРИЭДРА

В этом случае $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$ и уравнение (26) удовлетворяется тождественно. Из равенства $\dot{x}_G = v_{G_x}$ согласно (22) и (24) получим

$$(52) \quad \dot{\alpha} = \mu \dot{\psi} + \mu_1 \Omega,$$

где μ и μ_1 константы

$$(53) \quad \mu = \frac{a \sin \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}, \quad \mu_1 = \frac{R_1 + R_2 \sin \beta}{R_1 + (R_2 + a) \sin \beta}.$$

Из интеграла для кинетического момента (32) находим

$$(54) \quad \dot{\psi} = \frac{C_1}{A \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + B \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + C \cos^2 \theta_0 - ma^2 \sin^2 \beta},$$

т. е. угловая скорость $\dot{\psi}$ постоянная, а следовательно, согласно (52) постоянна и $\dot{\alpha}$. Покажем, что рассматриваемое движение возможно только

для однородного шара. В действительности третье уравнение (16) имеет вид

$$(55) \quad \begin{aligned} (A - B)\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - ma^2 \sin \beta \cos \beta \sin \theta_0 \cos(\alpha - \psi)\dot{\alpha}\dot{\psi} \\ - ma\Omega \cos \beta \sin \theta_0 \dot{\alpha}(R_1 + R_2 \sin \beta) \cos(\alpha - \psi) \\ = mga \sin \beta \sin \theta_0 \cos(\alpha - \psi). \end{aligned}$$

Очевидно при $A \neq B$ согласно (52) получилось бы, что $\dot{\psi}$ является функцией величины $\cos(\alpha - \psi)$, которая не является постоянной величиной, что противоречит (54). Аналогично, из второго уравнения (16) получается, что $A = C$.

При $A = B = C = \frac{2}{5}ma^2$ уравнение (55) имеет следующий вид

$$(56) \quad P\dot{\psi}^2 + Q\dot{\psi} + R = 0,$$

где

$$(57) \quad \begin{aligned} P &= a\mu \sin \beta \cos \beta, \\ Q &= \Omega[a\mu_1 \sin \beta \cos \beta + \mu \cos \beta(R_1 + R_2 \sin \beta)], \\ R &= \Omega^2 \mu_1 \cos \beta(R_1 + R_2 \sin \beta) + g \sin \beta. \end{aligned}$$

В соответствии с (53) и (57) для дискриминанты (56) получим

$$\Delta = Q^2 - 4PQ = -4ag\mu \sin^2 \beta \cos \beta.$$

Следовательно, движение в этом частном случае возможно только тогда, когда угол параллели находится в интервале

$$(58) \quad \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi,$$

т. е. в случае, когда шар движется по нижней внутренней стороне тора. Тогда нормальная компонента реакции тора удовлетворяет условию

$$(59) \quad N_u = (n^0 \cdot N) < 0.$$

Из формулы (42) имеем

$$N_u = mg \cos \beta - m \sin \beta \dot{\alpha}^2 [R_1 + (R_2 + a) \sin \beta],$$

откуда видно, что согласно (58) условие (59) тождественно удовлетворяется. Следовательно рассмотренное частное движение во внутренней стороне тора возможно без ограничений для угловой скорости Ω . Чтобы шар находился внутри тора имеем естественное ограничение $a < R_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк, Ю. И., Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. М., 1967.
2. Долапчиев, Б. л. Аналитична механика. С., 1966.
3. Диамандиев, В. Търкаляне на кълбо върху абсолютно гравава неподвижна сфера. — Год. Соф. унив., том 72, 1978.
4. Стоев, Н., В. Диамандиев. Търкаляне на кълбо върху абсолютно гравава равномерно въртяща се сфера. — Год. Соф. унив., том 72, 1978.

Поступила 5.4.1992

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 85, 1991

О МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОЙ ТРИБОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ВАСИЛ ДИАМАНДИЕВ

Васил Диамандиев. О МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОЙ ТРИБОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В настоящей работе рассматривается тепловая динамика следующей трибологической системы: два цилиндра (вала), из которых один равномерно вращающийся, трутся по их контактной поверхности. Принимается сферическая модель о шероховатой поверхности и находится формула о числе выступов. Показывается, что температура выступов изза трения достигает один максимум на основе предположения, что цилиндры теплоизолированы на малую глубину.

Vassil Diamandiev. ON THE ROUGH SURFACE MAXIMUM TEMPERATURE OF A TRIBOLOGIC SYSTEM

This paper considers the thermodynamics of the following tribologic system: two cylinders (shafts), one of which is evenly rotating, are rubbing along to their contact surface. A spherical model of the rough surface is assumed, and a formula for the number of asperities has been found. It is shown that the temperature of asperities at the friction reaches its maximum on the basis of the assumption that the cylinders are thermal-insulated at a shallow depth.

В настоящей работе рассматривается тепловая динамика следующей трибологической системы: два цилиндра (вала), из которых один неподвижный, а другой равномерно вращающийся, трутся по их основной контактной поверхности. Для простоты принимаем, что неподвижный цилиндр имеет идеальную гладкую основную поверхность, а подвижный

имеет шероховатую поверхность. В соответствии с моделями [1, 2, 3, 4, 5, 6] шероховатые поверхности рассматриваются как набор из сферических выступов, которые распределяются одинаково на данной площади. В этой работе принимается сферическая модель и находится формула для числе выступов, расположенных на данный круг, который представляет основу рассмотренных цилиндров. Это число зависит от размеров выступа и данного круга. Потом определяется температура выступов, которая возникает изза трения цилиндров, и показывается, что она достигает один максимум для малого интервала времени в начале процесса движения. Этот результат получен на основе предположения, что цилиндры теплоизолированы на малой глубине от их общей поверхности трения. Может быть это находит применение в теории тормозов в автотранспорте.

1. МОДЕЛЬ МИКРОГЕОМЕТРИИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть задан круг радиусом r_0 . В соответствии с принятой моделью считаем, что на нем распределены равномерно сферические выступы с равными размерами. Основы выступов находятся в соприкосновении плотно одной к другой (рис. 1). Эта концепция позволяет найти сравнитель-

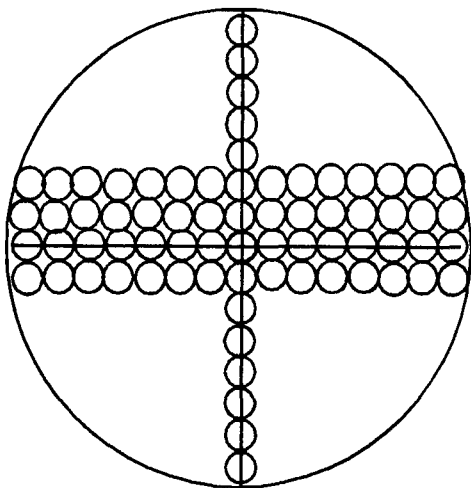


Рис. 1

но просто число выступов на круге. Обозначим через r_1 радиус основы выступа. Тогда на горизонтальном диаметре круга имеем следующее чис-

ло выступов .

$$(1) \quad n_1 = \frac{r_0}{r_1}.$$

Хорда, которая проходит через центры кругов на второй линии после горизонтального диаметра, имеет следующую длину

$$d_1 = 2\sqrt{r_0^2 - 4r_1^2}.$$

Следовательно число выступов на второй линии дано выражением

$$(2) \quad n_2 = n_1 \left(1 - \frac{4}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Аналогично имеем n_3 выступы на третьей линии, заданные через формулу

$$(3) \quad n_3 = n_1 \left(1 - \frac{16}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Число выступов вертикального диаметра также n_1 . По причине симметрии имеем, что число выступов на последней линии дано выражением

$$(4) \quad n_{\frac{n_1-1}{2}} = n_1 \left(1 - \frac{(n_1-1)^2}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Вся сумма N выступов на круге $O(r_0)$ согласно (2), (3) и (4) определяется через формулу

$$(5) \quad N = n_1 + 2n_1 \sum_{m=1}^{\frac{n_1-1}{2}} \left[1 - \frac{4m^2}{n_1^2}\right]^{1/2}.$$

В формуле (5) сделаем замену

$$(6) \quad x = \frac{2m}{n_1}.$$

Когда m принимает значения $1, 2, 3, \dots, \frac{n_1-1}{2}$, для x имеем из (6)

$$(7) \quad x_1 = \frac{2}{n_1}, x_2 = \frac{4}{n_1}, x_3 = \frac{6}{n_1}, \dots, x_{\frac{n_1-1}{2}} = \frac{n_1-1}{2},$$

т. е. x имеет приращение $\Delta x = \frac{2}{n_1}$. Функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ убывает относительно x и тогда на основе формулы о приближенном вычислении определенных интегралов получаем неравенства

$$(8) \quad \sqrt{1 - \left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2} + \frac{n_1}{2} \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx < \sum_{m=1}^{\frac{n_1-1}{2}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{n_1^2}} \\ < \sqrt{1 - \frac{4}{n_1^2}} + \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx.$$

Интеграл в (8) имеет следующее значение

$$(9) \quad \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{n_1-1}{2n_1} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2} - \frac{1}{n_1} \sqrt{1 - \frac{4}{n_1^2}} + \frac{1}{2} \arcsin \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}.$$

Учитывая (8) и (9), получим из формулы (5) неравенство

$$(10) \quad N < \frac{n_1^2}{2} \arcsin \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \frac{n_1-1}{2} \sqrt{2n_1-1} + n_1 + \sqrt{n_1^2-4} - \frac{n_1^2}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}$$

и соответственно неравенство

$$(10') \quad N > \frac{n_1^2}{2} \arcsin \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \frac{n_1+3}{2} \sqrt{2n_1-1} + n_1 - \sqrt{n_1^2-4} - \frac{n_1^2}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}.$$

Так как n_1 большое число, имеем приближенные формулы

$$(10'') \quad \arcsin \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n_1} \sqrt{2n_1-1},$$

$$\arcsin \frac{2}{n_1} = \frac{2}{n_1}.$$

От (10), (10') и (10'') получим неравенства

$$(11) \quad \frac{\pi}{4} n_1^2 - \sqrt{n_1^2-4} + \frac{3}{2} \sqrt{2n_1-1} < N < \frac{\pi}{4} n_1^2 + \sqrt{n_1^2-4} - \frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}.$$

Если возьмем среднее арифметическое из верхней и нижней границы, для N согласно (11) получим

$$(12) \quad N = \frac{\pi}{4} n_1^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}.$$

Величина $\frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}$ очень мала по отношению n_1^2 , т. е. можно принять

$$N = \frac{\pi}{4} n_1^2,$$

или согласно (1) находим

$$(13) \quad N = \frac{\pi r_0^2}{4r_1^2},$$

где r_1 радиус основы выступа. Формула (13) определяет число выступов на данной круговой площади. Эта формула имеет интересную геометрическую интерпретацию. Если малые круги радиусом r_1 покрывают большой круг $O(r_0)$, тогда их число дается выражением

$$N_0 = \frac{\pi r_0^2}{\pi r_1^2}.$$

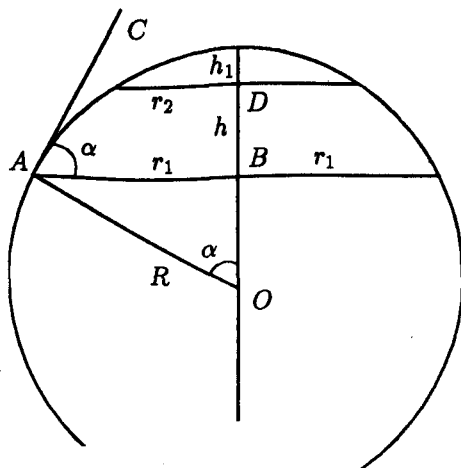


Рис. 2

Так как между ними находится промежуточная площадь, которая дает отражение в формуле (13), число кругов меньше чем N_0 .

Теперь переходим к некоторым формулам о размерах выступов при упругой деформации. Здесь оставим в сторону деформацию по причине трения и износа. Рассмотрим деформированный сферический выступ, имеющий форму сферического сегмента, показанный на рис. 2. Имеем следующие обозначения:

$CD = r_2$ — радиус касательной площади;

$AB = r_1$ — радиус основы выступа;

$h = BD$ — высота выступа;

α — угол, который составляет основы выступа с ей боковой стены;

$ED = h_1$ — вертикальная деформация.

По формулам Герца [7] имеем

$$(14) \quad \begin{aligned} h_1 &= \sqrt[3]{\frac{9}{16}(\Delta P)^2 \frac{k^2}{R}}, \\ r_2 &= \sqrt[3]{\frac{3}{4}\Delta P k R}, \end{aligned}$$

где ΔP нагрузка выступа, R — его радиус и k — константа, данная выражением

$$(15) \quad k = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}.$$

Здесь μ_i , E_i являются коэффициентом Пуассона и модулем Юнга. Формулы (14) имеют место в случае, когда одна из соприкасающихся поверхностей идеально гладкая. Обычно измеряют высоту h и угол α [8]. Через эти величины будем выражать размеры выступа. Пусть P сила нагрузки между цилиндрами. Если считаем, что эта сила распределяется равномерно, тогда один из выступов выдерживает следующую нагрузку

$$\Delta P = \frac{P}{N}$$

или согласно (13) имеем

$$(16) \quad \Delta P = 4pr_1^2,$$

где величина

$$(17) \quad p = \frac{P}{\pi r_0^2}$$

является номинальным давлением между цилиндрами. Согласно рис. 2 имеем следующие соотношения

$$(18) \quad R = \frac{r_1}{\sin \alpha}, \quad r_1 \cotg \alpha = R - h - h_1.$$

От (14), (16) и (18) после некоторых выкладок находим следующие формулы о размерах выступа

$$(19) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{h \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ r_2 &= \frac{h \sqrt[3]{3pk \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ R &= \frac{h}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ h_1 &= \frac{h \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}. \end{aligned}$$

Фактическая площадь контакта A_r между идеальным гладким цилиндром и шероховатым цилиндром определяется из соотношения

$$(20) \quad A_r = \pi r_2^2 N.$$

Согласно (13) и (19) получим из (20) отношение

$$(20') \quad \frac{A_r}{S} = \frac{\pi}{4} \sqrt[3]{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}},$$

где $S = \pi r_0^2$ номинальная круговая площадь цилиндра. Фактическое давление \bar{p} , приложенное к отдельному выступу, находится из соотношения

$$\bar{p} = \frac{\Delta P}{\pi r_2^2},$$

или согласно (16) и (19) находим

$$(21) \quad \bar{p} = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{\frac{p \sin^2 \alpha}{9k^2}}.$$

Рассмотрим некоторые числовые примеры для случая цилиндров из стали. Тогда имеем $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, $E_1 = E_2 = 2.10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и от (15) получим

$$k = 9,1.10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}.$$

Пусть радиус цилиндров $r_0 = 50$ см и сила нагрузки $P = 785$ кг. Из (17) находим

$$p = 0,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Возьмем $h = 2.10^{-5}$ см = 0,2 мк, $\alpha = 1^\circ = 0,017$. Согласно (19), (20') и (21) имеем соответственно

$$r_2 = 0,6 \text{ мк}, \quad h_1 = 2,5.10^{-4} \text{ мк}, \quad r_1 = 23,6 \text{ мк}, \\ R = 1350 \text{ мк}, \quad \frac{A_r}{S} = 5.10^{-4}, \quad \bar{p} = 205 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Как второй пример возьмем

$$h = 2.10^{-4} \text{ см} = 2 \text{ мк}, \quad \alpha = 10^\circ = 0,174$$

и получим соответственно

$$r_2 = 0,26 \text{ мк}, \quad h_1 = 5.10^{-4} \text{ мк}, \quad r_1 = 23 \text{ мк}, \\ R = 132 \text{ мк}, \quad \frac{A_r}{S} = 1.1.10^{-4}, \quad \bar{p} = 950 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Наконец определим объем деформированного выступа. Из рис. 2 имеем

$$(22) \quad dV = \pi(R^2 - z^2) dz,$$

где z ордината по радиусе OE . Из (22) получим

$$(22') \quad V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2), \dots$$

где

$$(23) \quad z_1 = r_1 \cot \alpha, \quad z_2 = r_1 \cot \alpha + h.$$

Из (19) имеем

$$(24) \quad h = \frac{r_1}{\sin \alpha} \left(1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha} \right).$$

Поставим (23) и (24) в (22') и получим

$$V = \frac{\pi r_1^2 h}{3} \left[1,5 + \frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sqrt{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}} + \cos \alpha \sqrt[3]{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}} \right].$$

Так как α и k маленькие величины, можно принять

$$(25) \quad V = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h,$$

которое является объемом деформированного выступа.

2. ТЕМПЕРАТУРА ВЫСТУПОВ

Предположим, что механическая работа, которую выступ совершает по причине трения, будет трансформироваться полностью в тепловую энергию. Обозначим с dQ количество теплоты, которая возникает для времени dt . Очевидно она определяется выражением

$$(26) \quad dQ = J f \Delta P r \omega dt,$$

где J тепловой эквивалент механической работы, f — коэффициент трения между поверхностями, ω — угловая скорость цилиндра, r — расстояние выступа от оси вращения. Величина J определяется численным выражением

$$(27) \quad J = \frac{10^{-4} \text{ кал}}{4,27 \text{ кг.см}}$$

Коэффициент трения определяется из эмпирической формулы [9]

$$(28) \quad f = 0,43 \frac{16\Delta P + 100}{32\Delta P + 100} \frac{r\omega + 100}{6r\omega + 100}$$

Так как радиус r_1 очень малая величина, имеем $\Delta P \approx 0$ и из (28) получим

$$(28') \quad f = 0,43 \frac{r\omega + 100}{6r\omega + 100},$$

где $r\omega$ имеет размерность $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Здесь оставляем в сторону факт, что f зависит от температуры трения.

Количество теплоты dQ распределяется между двумя цилиндрами на потоки dQ_1 и dQ_2 , которые определяются из следующего соотношения [10]

$$(29) \quad \frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1}}{\sqrt{k_2 c_2 \rho_2}},$$

где k_i , c_i , ρ_i теплофизические и физические характеристики тел. Кроме того имеем

$$(30) \quad dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

где dQ дано через (26). Из (29) и (30) получаем

$$(31) \quad dQ_1 = K dQ,$$

где K дается выражением

$$(32) \quad K = \frac{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1}}{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1} + \sqrt{k_2 c_2 \rho_2}}.$$

Принимаем, что dQ_1 количество теплоты, которое входит в сферическом выступе. Согласно (16), (26) и (31) имеем

$$(33) \quad dQ_1 = 4KJfpr_1^2 r \omega dt.$$

Формула (33) показывает, что количество теплоты пропорционально основной площади выступа. Из (33) следует

$$(33') \quad Q_1 = 4KJfpr_1^2 r \omega t,$$

которое количество теплоты для времени t , принимая, что p не зависит от времени. Согласно закона Фурье [10] теплота, которая выходит из дна выступа для времени dt , определяется выражением

$$(34) \quad dQ'_1 = -k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) \pi r_1^2 dt,$$

где $\theta(x, t)$ температура глубины x в моменте t . Из (34) получим

$$(34') \quad Q'_1 = -\pi r_1^2 k_1 \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) dt.$$

Здесь k_1 — коэффициент теплопроводности материала выступа. Количество теплоты, которое собирается в выступе для времени dt , определяется выражением

$$(35) \quad dQ_v = c_1 \rho_1 dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) dV,$$

где V объем выступа. Так как величина h очень малая и $0 \leq x \leq h$, из (35) согласно (25) находим

$$(35') \quad dQ_v = \frac{\pi}{2} r_1^2 h c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) dt.$$

Интегрируем (35') относительно времени и получим

$$(35'') \quad Q_v = \frac{\pi c_1 \rho_1 r_1^2 h}{2} [\theta(t) - T_0],$$

где $\theta(t)$ средняя температура выступа и T_0 температура окружающей среды.

Сделаем баланс теплоты, т. е. находим

$$Q_1 - Q'_1 = Q_v$$

или согласно (33'), (34') и (35'') имеем

$$(36) \quad \theta(t) = T_0 + A_1 t + \frac{2a_1^2}{h} \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) dt,$$

где величина A_1 определяется выражением

$$(37) \quad A_1 = \frac{8KJfpr\omega}{\pi c_1 \rho_1 h}$$

и величина

$$(38) \quad a_1^2 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1},$$

коэффициент теплопроводности. Величины c_1 , ρ_1 являются соответственно специфической теплотой материала и его плотностью.

Замечание. В формуле (36) не принимаем во внимание влияние температуры других выступов на данный выступ, который находится на расстоянии r от оси вращения, но это обстоятельство объясняется фактом, что процесс нагревания рассматривается для очень маленького интервала времени.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА МАЛЕНЬКУЮ ГЛУБИНУ ОТ ДАННОГО ВЫСТУПА

Будем рассматривать данный выступ как стержень, который продолжается на глубину l . Будем предполагать, что вращательный цилиндр теплоизолирован на глубине l , которую считаем малой величиной. Тогда распределение температуры по глубине будет описываться уравнением теплопроводности в линейном случае, т. е. [11]

$$(39) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

где величина a_1^2 определяется из (38). Если T_0 обозначает температуру окружающей среды, функция $\theta(x, t)$ должна выполнять условия

$$(40) \quad \theta(x, 0) = T_0, \quad \theta(l, t) = T_0,$$

где второе условие выражает очевидно теплоизолированность цилиндра. Температуру поверхности выступа определим из условия, что количество теплоты Q_1 , данное из (33') моментально поглощается объемом V на глубине l , который дается выражением

$$(41) \quad V = \frac{\pi}{2} r_1^2 h + \pi r_1^2 (l - h).$$

Исходя из элементарного уравнения физики о поглощении теплоты данной массой, о температуре поверхности согласно (41) и (33') получим

$$(42) \quad \theta(0, t) = T_0 + At,$$

где величина A дается выражением

$$(43) \quad A = \frac{8KJfpr\omega}{\pi c_1 \rho_1 (2l - h)}.$$

Условия (40) и (42) являются начальными и граничными для уравнения (39). Будем определять решение этого уравнения символическим способом Хевисайда [12, 13]. Приложим преобразование Лапласа относительно (39) и согласно (40) получим

$$(44) \quad a_1^2 \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} = s\theta_L(x, s) - T_0,$$

где

$$(45) \quad \theta_L(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \theta(x, t) dt.$$

Из (44) находим

$$(46) \quad \theta_L(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_1(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x} + B_2(s) e^{\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}.$$

Условия (40) и (42) для (46) согласно (45) дают

$$(47) \quad \begin{aligned} B_1(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} l} + B_2(s) e^{\frac{\sqrt{s}}{a_1} l} &= 0, \\ B_1(s) + B_2(s) &= \frac{A}{s^2}. \end{aligned}$$

Решая систему (47) и подставляя в (46), находим

$$(48) \quad \theta_L(x, s) = \frac{T_0}{s} + \frac{A e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^2 \left[1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right]} - \frac{A e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^2 \left[1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right]}.$$

Возьмем обратную трансформацию Лапласа из уравнения (48), т. е. находим

$$(49) \quad \theta(x, t) = T_0 + AL^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^2 \left\{ 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right\}} \right] - AL^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^2 \left\{ 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right\}} \right].$$

Так как принимаем, что l маленькая величина, пренебрегаем l^2 , l^3 и т. д., т. е. имеем приблизительно

$$(50) \quad 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \approx \frac{2l}{a_1} \sqrt{s}.$$

Согласно (50) из (49) получим

$$(51) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{a_1 A}{2l} L^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^{\frac{5}{2}}} \right] - \frac{a_1 A}{2l} L^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^{\frac{5}{2}}} \right].$$

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ ОБ ОБРАТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Будем исходить из известной формулы [10]

$$(52) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \quad (k > 0),$$

где k произвольный положительный параметр. Из этой формулы будем получать нужные для нас выражения в (51). Для этой цели покажем законность формул

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} L^{-1}[\Phi(s, k)] &= L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k} \right], \\ \int_{k_1}^{k_2} L^{-1}[\Phi(s, k)] dk &= L^{-1} \left[\int_{k_1}^{k_2} \Phi(k, s) dk \right], \end{aligned}$$

где $\Phi(k, s)$ произвольная дифференцируемая функция относительно k . Пусть даны прямая и обратная трансформация Лапласа [13]

$$(54) \quad L[f(k, t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(k, t) dt = \Phi(k, s),$$

$$L^{-1}[\Phi(k, s)] = f(k, t).$$

Из (54) получим

$$(55) \quad \frac{\partial f(k, t)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} L^{-1}[\Phi(k, s)],$$

$$(56) \quad \frac{\partial}{\partial k} L[f(k, t)] = L \left[\frac{\partial f(k, t)}{\partial k} \right] = \frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k}.$$

Из (56) имеем

$$(57) \quad \frac{\partial f(k, t)}{\partial k} = L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k} \right].$$

Сравнивая (55) и (57), получаем первое из соотношений (53). Интегрируя первую из формул (54), находим

$$(58) \quad L \left[\int_{k_1}^{k_2} f(k, t) dk \right] = \int_{k_1}^{k_2} \Phi(k, s) dk.$$

Если интегрируем вторую из формул (54), получим

$$(59) \quad \int_{k_1}^{k_2} f(k, t) dk = \int_{k_1}^{k_2} L^{-1}[\Phi(k, s)] dk.$$

Сравнивая (58) и (59), получаем второе из соотношений (53).

Применяя операцию интегрирования под знаком L^{-1} к формуле (52), получим

$$(60) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk.$$

Аналогично, применяя ту же операцию к формуле (60), имеем

$$(61) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k \left[\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk \right] dk - k,$$

Из свойств гамма функций [14] находим

$$(61') \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right] = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Через интегрирование по частям имеем

$$(61'') \quad \int_0^k \left[\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk \right] dk = k \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + 2te^{-\frac{k^2}{4t}} - 2t.$$

Из (61), (61') и (61'') находим

$$(62) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \frac{k}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k.$$

Аналогично, совершая последовательное интегрирование формулы (62), находим

$$(63) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-k\sqrt{s}} \right] = t + \frac{k^2}{2} - k\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - \left(\sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{k^2}{2\sqrt{\pi t}} \right) \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk,$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \left(k\sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{k^3}{6\sqrt{\pi t}} \right) \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} (k^2 + 4t) - kt - \frac{1}{6} k^3.$$

Последнюю формулу будем использовать для функции температуры (51).

5. МАКСИМАЛЬНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ВЫСТУПОВ

Температура выступов определена из формулы (36). Покажем, что для маленького интервала времени она достигает максимум. Для этой цели определим функцию $\theta(x, t)$, данную в (51). Приложим формулу (63),

в которой положим соответственно $k = \frac{x}{a_1} > 0$ и $k' = \frac{2l-x}{a_1} > 0$. Таким образом получим

$$(64) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{A}{2l} \left[\left(x \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{x^3}{6a_1^2 \sqrt{\pi t}} \right) \int_0^{\frac{x}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\frac{x^2}{a_1} + 4a_1 t \right) e^{-\frac{x^2}{4a_1^2 t}} - xt - \frac{x^3}{6a_1^2} \right] - \frac{A}{2l} \left[\left\{ (2l-x) \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{(2l-x)^3}{6a_1^2 \sqrt{\pi t}} \right\} \int_0^{\frac{2l-x}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ \frac{(2l-x)^2}{a_1} + 4a_1 t \right\} e^{-\frac{(2l-x)^2}{4a_1^2 t}} - (2l-x)t - \frac{(2l-x)^3}{6a_1^2} \right].$$

Из формулы (64) после соответственных выкладок находим

$$(65) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) = \frac{A}{l} \left[-t - \frac{1}{a_1^2} (l^2 - lh + 0.5h^2) + \frac{h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{(2l-h)}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^3 \sqrt{\pi t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 t \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right].$$

В выводе формулы (65) использованы следующие приближения:

$$\int_0^{\frac{h}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \frac{h}{a_1},$$

$$\int_0^{\frac{2l-h}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \frac{2l-h}{a_1} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + \frac{(2l-h)^3}{6a_1^2 t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}}$$

по причине малых значений h и l . Вставляя величину $\frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t)$ из (65) в (36), получим окончательную формулу для температуры выступов

$$(66) \quad \theta(t) = T_0 + A_1 t + \frac{2a_1^2 A}{lh} \left[\frac{2}{3} \frac{ht\sqrt{t}}{a_1 \sqrt{\pi}} + \frac{2l-h}{a_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} dt + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt - \frac{1}{2} t^2 - \frac{t}{a_1^2} (l^2 - lh) \right].$$

Величины A_1 и A согласно (37) и (43) связаны релацией

$$(67) \quad A = \frac{h}{2l-h} A_1.$$

Дифференцируем функцию $\theta(t)$ и получим

$$(68) \quad \frac{d\theta}{dt} = A_1 + \frac{2a_1^2 A}{lh} \left[\frac{h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{2l-h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{h}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} \right. \\ \left. + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^2 \sqrt{\pi t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - t - \frac{1}{a_1^2} (l^2 - lh) \right].$$

Из формулы (68) согласно (67) находим

$$\frac{d\theta}{dt}(t=0) = \frac{A_1 h}{2l-h} > 0,$$

т. е. функция $\theta(t)$ возрастает для $t = 0$. Приравнявая $\frac{d\theta}{dt}$ к нулю, после некоторых вычислений получим

$$(69) \quad t^2 \sqrt{t} - \frac{t^2}{a_1 \sqrt{\pi}} \left[h + (2l-h) e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} \right] - \frac{lh}{2a_1^2} t \sqrt{t} \\ - \frac{(2l-h)^3}{12a_1^2 \sqrt{\pi}} t \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} - \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} = 0.$$

Так как $h \ll l$, из (69) находим следующее приближенное решение для t :

$$(70) \quad t_1 = 1,93 \frac{l^2}{a_1^2}.$$

Трансформируем некоторые интегралы в (66) следующим образом:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt = \frac{4a_1^2}{(2l-h)^2} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} - \frac{6a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt, \\ (71) \quad \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{16a_1^2}{(2l-h)^2} \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - \frac{8a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt, \\ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{16a_1^2}{(2l-h)^2} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - \frac{24a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt.$$

Согласно теореме о средних значениях имеем приблизительно

$$(72) \quad \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt = \frac{2}{3} t \sqrt{t} e^{-\frac{3(2l-h)^2}{8a_1^2 t}}, \\ \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{2}{3} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}}.$$

Поставим (70) в формуле (66) и согласно (71) и (72) получим

$$\theta_{\max} = T_0 + 6,83 \frac{K J f p r \omega}{h c_1 \rho_1 a_1^2} l^2 + 2,66 \frac{K J f p r \omega}{c_1 \rho_1 a_1^2} l.$$

Так как $\frac{l^2}{h} \gg l$, согласно (38) можем принимать

$$(73) \quad \theta_{\max} = T_0 + 6,83 \frac{K J f p r \omega}{h k_1} l^2.$$

Формула (73) определяет максимальную температуру данного выступа, находящегося на расстоянии r от оси вращения цилиндра.

Рассмотрим некоторые численные примеры относительно формулы (73). Возьмем цилиндры (валы) из стали с радиусом $r_0 = 50$ см. Как и в прежних примерах пусть сила нагрузки между цилиндрами $P = 785$ кг, т. е. номинальное давление будет $p = 0,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Угловая скорость вращения принимаем $\omega = 100 \text{сек}^{-1}$. Линейная периферийная скорость цилиндра

будет $v = r\omega = 180 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. Величина (15) как и раньше принимает значение

ние $K = 9,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$. Коэффициент трения согласно формулы (28') будет

по периферии цилиндра $f = 0,102$. Так как цилиндры имеют одинаковые теплофизические характеристики согласно (32) $K = \frac{1}{2}$. Коэффициент

теплопроводности стали имеет стоимость $k_1 = 1,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см.сек.град}}$. Тем-

пература T_0 принимаем 0°C .

Как первый пример возьмем шероховатую поверхность с выступами, имеющие высоту $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{см} = 20 \text{мк}$ и $\alpha = 10^\circ = 0,175$. По формулам (19) имеем $R = 0,14$ см. Принимаем глубину теплоизолированности цилиндра $l = 2 \text{мм} = 2 \cdot 10^{-1} \text{см}$. По формуле (73) находим

$$\theta_{\max} = 580^\circ \text{C}.$$

Как второй пример возьмем $h = 8 \cdot 10^{-3} \text{см} = 80 \text{мк}$ и $\alpha = 10^\circ$. По формулам (19) имеем $R = 0,57$ см. Принимаем глубину $l = 5 \cdot 10^{-1} \text{см}$. По формуле (73) получим $\theta_{\max} = 906^\circ \text{C}$.

По формуле (21) в двух случаях имеем

$$\bar{p} = 940 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев, В. А. К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей. — Журн. технической физики, 1940, №10, вып. 17.

2. Bowden, F. P., D. Tabor. The area of contact between stationary and moving surfaces. — Proc. Roy. Soc. vol. 169, 1939.
3. Rubinstein, C. A. A general theory of the surface friction of solids, — Proc. Phys. Soc., 1956, vol. 69.
4. Archart, J. F. Contact and rubbing of flat surfaces. — J. Appl. Phys. vol. 24, № 8, 1953.
5. Archart, J. F. Elastic deformation and the laws of friction. — Proc. Roy. Soc. vol. 243, 1957.
6. Molgaard, J. A. Coefficient of friction which increases with increasing. — Proc. Phys. Soc., vol. 79, 1962.
7. Timoshenko and Goodier. The mathematical theory of elasticity. 19, 1967.
8. Левин, Б. Н. Контактный метод измерения микрогеометрии поверхности. Машгиз, 1950.
9. Карвацкий, Б. Л. Расчет и исследование автотормозов. 1961.
10. Лыков, А. В. Теория теплопроводности. М., 1967.
11. Тихонов, А. Н., А. А. Самарский. Уравнения математической физики. 1966.
12. Карлслоу, Г., Д. Еггер. Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.
13. Дейч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1958.
14. Градштейн, И. С., И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила 12.04.1992

СОДЕРЖАНИЕ

Книга 1 — Математика

Ангел Дичев — Примеры структур, недопускающих рекурсивных моделей	3
Димитр Скордев — О средней задержки обнаружения заикливания	13
Георги Александров — Несколько замечаний о строго позитивных мер	35
Грозьо Станилов, Веселин Видев — Характеристика комплексных пространственных форм	39
Веско Вылов — Сюррективные характеристики метризуемых LC^∞ -пространств	43
Чавдар Лозанов, Гергана Енева — О геометрии подгрупп группы Сузуки в конечных немикелевых инверсных плоскостях	49
Грозьо Станилов, Ирина Петрова — Обобщенный оператор Якоби в 4-мерной римановой геометрии	55
Николай Хаджииванов — Об одной теореме Хопфа	65
Недялко Ненов — О $(3,4)$ -графах Рамсея без 9-клик	71
Цанко Генчев, Керопе Чакърян — Факторизации групп типа Лиливского ранга 3 над полями из двух или трех элементов	83
Иванка Иванова-Каратопраклиева — Бесконечно малые изгибания некоторых классов поверхностей вращения смешанной кривизны	89
Павел Азалов, Венцислав Димитров — Cip^{++} : Объектно-ориентированное расширение одной реляционной СУБД	107

Книга 2 — Механика

Огнян Христов — Бифуркации инвариантных многообразий в одном модели в динамики твердого тела	123
София Денева — Частные движения шара, катящегося по абсолютно шероховатому тору	131
Васил Диамандиев — О максимальной температуре шероховатой поверхности одной трибологической системы	143